エレガントな解答をもとむ

【解答】

◉出題
2014年1月号

出題 1

◉出題者
西山 豊

荷造り用のPPバンドを6本集めてセパタクローボールを作ることができます．この6本の帯の色がすべて異なるとき，異なるパターンのセパタクローボールが何通りできるでしょうか．

（注） セパタクローは東南アジアの球技であり，使用するボールは準正32面体の形をしています．3本の帯はすべての箇所で三すくみの関係になっていてほどけず，各帯は大圏コースを通ります．空洞部分は正五角形の形をしています．

解答 1

応募者は20代3名，30代3名，40代9名，50代15名，60代10名，70代4名，80代1名の計45名でした．24通りとするものが正解で正解者は20名でした．答案の分布は，12通りとしたものが14名(31%)，24通りとしたものが20名(45%)，48通りとしたものが6名(13%)，その他が5名(11%)でした．

12通りか，24通りか，48通りかの三択問題のようになりましたが，12通りとした答案はバンドの重なり方に2種類あるのに気づかなかったもの，48通りとした答案は北極と南極では色の順序が逆回りになっていることに気づかなかったものでした．どちらも気づかず答えが偶然24通りになったという答案はありませんでした．

また，6色のバンドであるから，

$6! = 720$ 通り

となるのではないかと思ったが，解いてみて意外と少なかったと感想を寄せられる方が多くありました．一方，競技用セパタクローの公式球は出題の写真と重なり方が逆になっているという指摘もありましたが，バンドの重なり方に関係なくセパタクローボールとしてあつかうことにしました．

図1は色の組合せだけで考えた12通りのボールを実際に作ってみて確認したもので，図2はバンドの重なり方に2種類あることを示したものです．

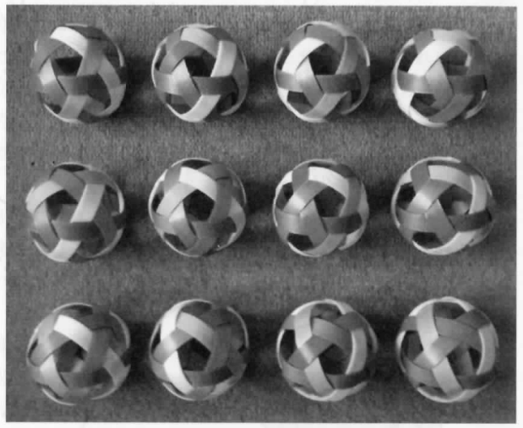

図1 色の組合せでは12通り

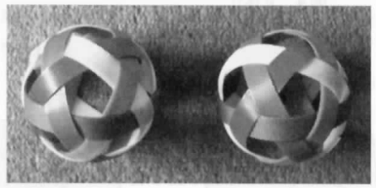

図2 バンドの重なり方に2種類

*　*　*

正解者の20名はほぼ同様な方法で解かれましたが，これらの答案を参考にしながら説明します．セパタクローボールの作成法より考えて正五角形が12個できます(作り方は[1]を参考にしてください)．以下では，ボールを地球に見立てて赤道，北極，南極といった言葉を用いることにします．また，バンドの色を①～⑥とします．

1つの正五角形(北極)に注目し，その正五角形をPとします．Pの5つの辺は5色のバンドで構成され，6色目のバンドは，対称性よりPの中心と球の中心を通る直線に垂直な大円(赤道)となります．このバンドを①と固定して考えます．

Pの5辺を構成する②～⑥のバンドの配置は円順列で

$(5-1)! = 4! = 24$ 通り

となります．

Pの真裏(南極)の正五角形の配置は上下反転するとともに，色の順序が逆回りになっています(図3)．ある配置とその逆回りを重複して数えているので

$24 \div 2 = 12$ 通り

となります．

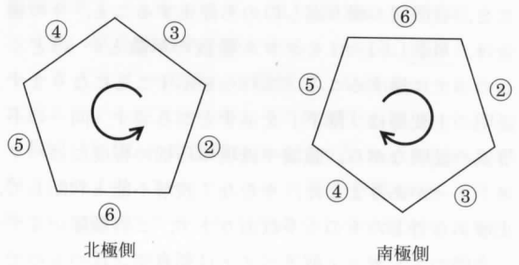

図3 北極と南極では色の順序が逆回り

また，三すくみに注目すると，図4のようにバンドの重なり方は2種類あることがわかるので

$12 \times 2 = 24$ 通り

となり，これが答えとなります．

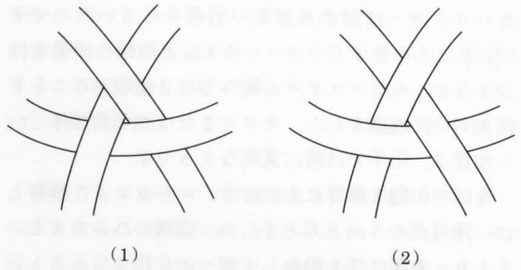

図4 三すくみに2種類

セパタクローボールは

（1） 3本のバンドを三すくみにすること
（2） 5本のバンドで正5角形を作ること

という2つの規則を守れば自然と出来上がります[1]．正五角形が12個，正六角形が20個できますので，サッカーボールと同じ準正32面体となります．図5では空洞(黒色)が正五角形，バンドの重なった場所に点線を描くと正六角形となります．このボールを作成したことのない読者はぜひとも作ってみてください．

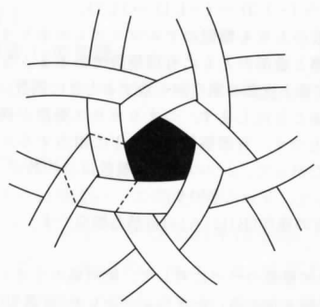

図5 空洞が正五角形，点線で囲むと正六角形

*　*　*

編集部から出題の依頼があったとき，良い問題が作れないので今回はパスしようかと思っていたところ，アメリカから突然メールが送られてきました．金属ハロゲン化物に関する論文の告知で，私とは無縁のように思えましたが，よく読んでみると，この論文に私の

●20代
大津市・栗原悠太郎

●30代
所沢市・朝倉崇之
さいたま市・井上昌一
町田市・小林洋平

●40代
町田市・鈴木智秀
豊前市・林道宏
藤井寺市・藤田幸久

●50代
日立市・伊藤一光
箕面市・斎藤博
赤穂市・政家一穂
横浜市・山田正昭
横浜市・髙橋利之
亀岡市・森修啓
徳島県・新矢隆

●60代
東京都・渡邊芳行
日立市・高橋健吾
島根県・山本長晴
横浜市・水谷一
茅ヶ崎市・鈴木豊

●70代
飯田市・小林博省

セパタクローに関する記事が引用されていたのです[2][3]．この分子がフラーレン C_{60} と同類の構造を持つようで，セパタクローの編み方に2種類あることを教えていただきました．キラルまたは光学異性体という性質は，化学では特に重要なようです．

今回の出題と解答にあたって，エレガントな解答とは一体何だろうかと考えました．頭脳のひらめきというより，実際に手を動かしてボールを作ってみるという泥臭い作業がエレガントな解答ではと思いました．

参考文献

[1] 西山豊，「セパタクローで数学を」，『数学を楽しむ』，現代数学社，2008，111〜121ページ．

[2] Y. Nishiyama, "The Sepak Takraw Ball Puzzle", *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2012, **79**, 281-291.

[3] A. Tlahuice-Flores, *et al.*, "Structure bonding of the gold-subhalide cluster I-$Au_{144}Cl_{60}^{[z]}$", *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2013, **15**.

[にしやま ゆたか／大阪経済大学情報社会学部]

出題 2

◉出題者
浅井哲也

ユークリッド互除法につぎの異型があります．

(A) 整数のペアに対して，絶対値の小さくない方に他方の±2倍を加える．ただし±2の符号は適切に選ばれる．

このアルゴリズムでは整数の偶奇性が保たれたまま計算が進行します．この特長はしばしば有用です．

特に，互いに素な奇数のペアは操作(A)を繰り返すことによって奇数同士のペアを経て $(1,1)$ に移ります．例を挙げておきます．

$$(19,31) \to (19,-7) \to (5,-7) \to (5,3) \to (-1,3) \to (-1,1) \to (1,1).$$

ガウス整数のときも類似のアルゴリズムがあります．ガウス整数とは実部と虚部がともに有理整数であるような複素数のことですが，実部と虚部の偶奇が一致するときに偶数，異なるときに奇数と呼ぶことにします．つまりガウス整数が偶数とは $1+i$ の倍数のことです．有理整数での ±1 に相当するガウス整数は $\pm1, \pm i$，したがって，2つのガウス整数は公約数が $\pm1, \pm i$ のみのときに限って，互いに素です．

さて，つぎの操作(B)は(A)の自然な類似です．

(B) ガウス整数のペアに対して，絶対値の小さくない方に他方の $\varepsilon(1+i)$ 倍を加える．ただし $\varepsilon = \pm1, \pm i$ は適切に選ばれる．

ここからが問題です．つぎのことを示してください．

ガウス整数のペアが与えられ，ともに奇数かつ互いに素であるとする．このとき，操作(B)を繰り返すことによって，このペアを $(1,1)$ に移すことができる．

解答 2

ユークリッド互除法は史上最高の数学です．単純で美しく，そして深い．互除法の名は定着していますが，最近は原義に即して「相互差引」という訳語を充てることもあるようです．今回は「相互差引」の異型(A)を取り上げ，そのガウス整数版(B)を問題としました．結果的には，「相互差引」のおもしろさよりは，複素数やベクトルの扱いといった受験数学的要素が目立つことになり，焦点が少しぼやけたかも知れません．

応募者は51名，10代1名，20代3名，30代6名，40代3名，50代20名，60代17名，80代1名，そのうち私の解読できた31通を正解としました．

通常のユークリッド互除法の場合と同様，与えられたペアに，操作(B)を施すことで真の「降下」が生じること，有限回の繰り返しののち停止すること，今の場合は，単数($\pm1, \pm i$ をガウス整数の単数という)どうしのペアに達すること，これらを示すことになります．証明の主要部は「降下」を示すところです．同一の不等式の証明ながら，議論や表現の巧拙の程度にはバラエティーがありました．やむなく読解不能と判断して，正解から外したものも多数あります．ご容赦願います．

今回のエレガント解答ベストは朝倉崇之氏のものです．図も計算も最小限で済ませる議論は見事です．ありがとうございました．これを参考に**解答1**としました．

代数式の計算だけで済ませた人もいます．山田正昭氏の解答は，座標を回転したお蔭で非常に簡明な計算になりました．エレガントです．**解答2**で紹介します．

一番多かったのは，ベクトルの内積などを用いてコサイン関数の計算に持ち込むものでした．名解がたくさんありましたが，栗原悠太郎氏の複素数計算を参考にして**解答3**で代表させます．

なお**解答2, 3**では，解答の主要部，すなわち**解答1**にある命題の証明のみを述べます．他の部分は**解答1**と同じと考えてください．

◉── 解答1

最初に，鍵となるつぎの命題を準備する．

命題 複素数 α, β について，つぎのことが成り立つ．$|\beta| \geqq |\alpha| > 0$ かつ $\beta \neq \pm\alpha, \pm i\alpha$ ならば，

$$|\beta - \varepsilon(1+i)\alpha| < |\beta|$$

を満たすように $\varepsilon = \pm1, \pm i$ を選ぶことができる．

命題の証明 複素数平面でつぎの不等式を満たす z の領域を考える．

(I) $|z| \geqq |\alpha|$.

(II) $|z - \varepsilon(1+i)\alpha| \geqq |z|$, $\quad (\varepsilon = \pm1, \pm i.)$

方程式 $|z| = |\alpha|$ が表す図形は中心0，半径 $|\alpha|$ の円であるから，(I)の領域はこの円周とその外部である．

方程式 $|z - \varepsilon(1+i)\alpha| = |z|$ が表す図形は2つの点 $0, \varepsilon(1+i)\alpha$ の垂直2等分線，すなわち $\varepsilon\alpha$ と $\varepsilon i\alpha$ を結ぶ直線である．したがって，(II)の領域はこの直線を含む片側，原点側の半平面である．だから，(II)の4つの不等式をすべて満たす領域は，4点 $\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha$ を頂点とする正方形の周とその内部である．

領域(I), (II)の共通部分は4つの点 $\pm\alpha, \pm i\alpha$ のみである．つまり，$z = \pm\alpha, \pm i\alpha$ の場合を除けば，(I)を満たす z は(II)の4つの不等式をすべて満たすことはない．特に α, β が命題の仮定を満たすとき，$z = \beta$ はどれか一つの不等式を満たさない．すなわち，少なくとも一つの $\varepsilon = \pm1, \pm i$ に対して $|\beta - \varepsilon(1+i)\alpha| < |z|$ が成り立つ．　(命題の証明終了)

改めて α, β がガウス整数でともに奇数，そして互いに素とする．仮に $|\beta| \geqq |\alpha|$ としよう．このとき，α, β は，ともに単数でない限り，命題の仮定を満たすから，適切に単数 ε を選んで $\beta' = \beta - \varepsilon(1+i)\alpha$ とおけば，$|\beta'| < |\beta|$ とできる．すなわち，操作(B)によって真の「降下」が生じる．尺度は適当でよいが，例えば「降下」を

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 > |\alpha|^2 + |\beta'|^2$$

と表すことができる．明らかなことであるが，新しいペア α, β' についても，ともに奇数かつ互いに素という性質が保持されていることに注意する．さて「降下」の尺度 $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ は自然数だから，結局，操作(B)を有限回繰り返したのち，ともに単数のペアに達する．さらに，これを $(1,1)$ に移すことが可能なことは

$$-i + (1+i) = 1, \qquad -1 + (1+i) + (1-i) = 1$$

などによって明らかである．

◉── 解答2

命題(解答1)の別証

$$\alpha = ae^{i\theta} \qquad (a = |\alpha| > 0,\ \theta = \arg\alpha)$$

と表して，

$$\beta e^{-i\theta} = b + ci$$

とおく(a, b, c は実数)．このとき

$$(\beta - \varepsilon(1+i)\alpha)e^{-i\theta} = (b \pm a) + (c \pm a)i$$

となる．ただし，左辺の $\varepsilon = \pm1, \pm i$ に応じて右辺の二重の ± は4通りの組み合わせ(順不同)をとる．すると

$$|\beta - \varepsilon(1+i)\alpha|^2 - |\beta|^2$$

●エレガントな解答
所沢市・朝倉崇之
横浜市・山田正昭
大津市・栗原悠太郎
東京都・東心一
たつの市・松下賢二
つくば市・yk
東京都・ξ
奈良県・野崎伸治
富山県・無明子
市川市・すみれ草

●その他の正解者
さいたま市・井上昌一
松山市・冨永昌以
鯖江市・山本ジョージ
豊前市・林道宏
静岡市・鈴木丈喜
日立市・伊藤一光
京都市・清洲早紀
我孫子市・よっちゃん
横浜市・高橋利之
三鷹市・石川和弘
西宮市・ぬるぽ
市川市・三寺芳樹
長崎市・城崎尚人
京都市・知魚楽
小平市・坂本茂
島根県・山本長晴
高崎市・高橋広幸
宇都宮市・宇留野隆
札幌市・安田富久一
茅ヶ崎市・鈴木豊
長岡京市・クスコ