エレガントな解答をもとむ【解答】

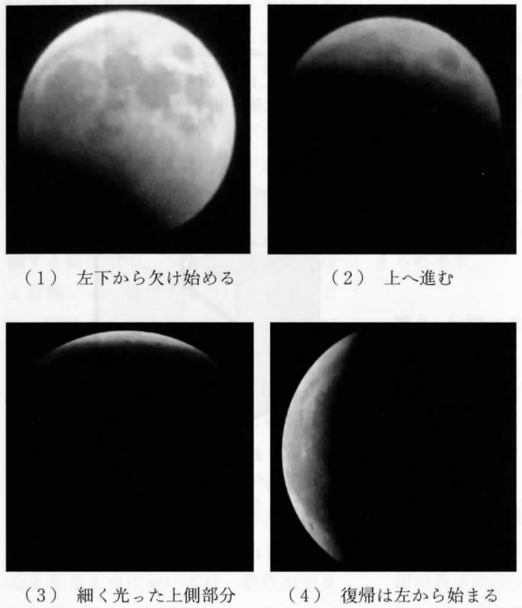
◉出題
2015年3月号

出題 1

◉出題者
西山 豊

2014年10月8日の皆既月食は，左下から欠け始め，最後に細く光った上側部分が消えると皆既月食へ突入しました．復帰は左側のやや上方向から始まり，最後に右端から地球の影が抜けて終了しました．

月が欠けた方向と復帰した方向が約90度もずれているのは，どうしてでしょうか？



（1） 左下から欠け始める　（2） 上へ進む

（3） 細く光った上側部分　（4） 復帰は左から始まる

図1 皆既月食（ウェザーニュース「特別番組 皆既月食」より）

解答 1

応募者は10代1名，20代4名，30代4名，40代5名，50代18名，60代16名，70代1名，80代1名の計50名でした．欠け始めと復帰の方向が約90度ずれている理由を，月の通り道が地球の本影の中心からずれているためとしたものが29名，さらに月の見かけの回転を考慮したものが7名あり，これら36名を正解としました．説明が不十分な14名は不正解としました．

月食は，太陽・地球・月が一直線に並ぶとき，つまり，満月のときだけに起こります．ただし，星空の中での太陽の通り道（黄道）に対して月の通り道（白道）が約5度傾いているため，満月のたびに月食が起こるというわけではありません．

ふだんの満月は，地球の影の北側や南側にそれた位置になります．月食が起こるのは太陽・月が黄道・白道の交わる点（月の昇交点・降交点）付近にいるとき，つまり春分または秋分の近くで起こります．月食のうち地球の本影の中に月が完全に入るのを皆既月食と言います．

2014年10月8日は，秋分の日（9月23日）に近く，満月の日で，好天に恵まれ，夕方から，欠け始めより復帰までの約3時間の全工程を全国各地で見られるという極まれな皆既月食となりました．そこへ天文オンチの私が観測するという偶然も重なって今回の出題となりました．2012年5月20日の金環日食を見たことから，欠け始めの場所から，月が復帰するものとばかり思っていました．月の通り道が本影の中心からずれていることが原因なのか，月の見かけの回転が関係しているのか大いに悩みました．

●20代
川崎市・清水俊宏
尾張旭市・髙柳鉄心

●30代
東京都・北原知就
所沢市・朝倉崇之

●40代
福井県・小松邦嘉
町田市・鈴木智秀
東京都・日塔祐治

●50代
日立市・伊藤一光
東近江市・平岩治司
京都市・清洲早紀
鯖江市・山本ジョージ
さいたま市・河村直彦
箕面市・斎藤博
姫路市・野崎歩
豊前市・林道宏
横浜市・山田正昭
横浜市・髙橋利之
芦別市・梅津健司
大田原市・大野雅彦
東京都・浜田忠久

●60代
志木市・細野源蔵
日立市・髙橋健吾
東京都・渡邊芳行
赤穂市・政家一穂
山口市・奈良岡悟
横浜市・水谷一
東京都・ξ
東京都・南葛菊池小嶋
岡山市・高見寿
横浜市・武本明子
高崎市・高橋広幸
徳島市・古川民夫
町田市・山根康男
名古屋市・廣田正史

●70代
厚木市・遊数戯図呆人

●80代
長岡京市・クスコ

◉── 本影の大きさ

まず，地球の本影の大きさはどのくらいかを押えておく必要があります．図2の位置関係より，本影の半径は，太陽・地球・月の半径，地球から太陽・月までの距離から，図形の比例式で計算できます．本影の半径は，月の半径の約2.7倍となります．地球の半径は月の半径の約3.7倍ですので，本影は地球より少し小さめとなります．

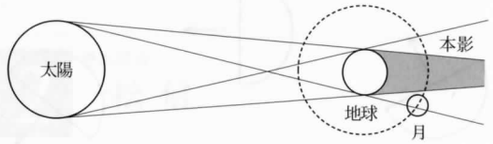


図2

また，月が移動すると同時に本影も移動しますが，影の速度の方が月の速度より大きく，地球の影が月を追い越していく形となります．

◉── 90度の可能性

月が，約2.7倍の本影の中を通過する仕方を考えてみましょう．多くの答案は月の経路が本影の中心から北側にずれることにより，方角が90度ずれる可能性があると説明していました．

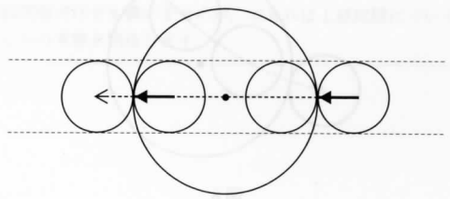


図3

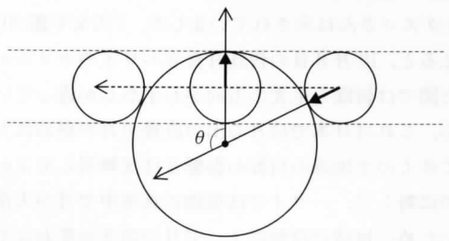


図4

皆既月食となる極端な例を図3と図4に示します．図3は月が本影の中心を通るとき，図4は月が本影の縁をすれすれに通るときです．

図3では，欠け始めの方向と，復帰の方向を月の中心から見ると，変化していないので，方向の変化は0度となります．図4では方向の変化は約120度となります．本影の半径を R，月の半径を r，月の中心の本影の中心からのずれを d とすれば，方向の変化 θ はつぎのように計算できます．

$$\sin\alpha = \frac{d}{R+r}, \quad \sin\beta = \frac{d}{R-r},$$

$$\theta = \alpha+\beta, \quad 0 \leqq d \leqq R-r$$

θ は0度から120度まで連続的に変化するので，その間に90度があるはずで，それを図5に示します．

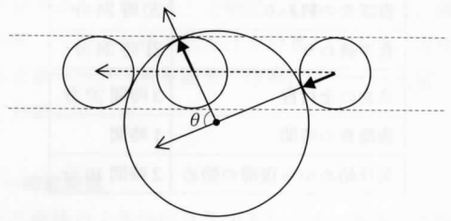


図5

90度の可能性が示されましたので，これを出題の方角に合わせると図6となります．つまり，左下から欠け始め，上へと進み，復帰は左上から始まり，右に進むという現象をほぼ説明できたことになります．

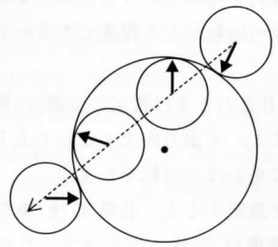


図6

◉── 月の見かけの回転について

ここで，月が本影の中心を通過した場合は欠け始めと復帰の方向が同じ，つまり0度となるかどうかです．月の見かけの回転を考慮した答案は，福井県・小松邦嘉さん，さいたま市・河村直彦さん，横浜市・髙橋利之さん，山口市・奈良岡悟さん，高崎市・高橋広幸さん，徳島市・古川民夫さん，長岡京市・クスコさんの7名でした．

表1に，10月8日に東京で見た皆既月食の時刻の概要を示しておきます．

表1

できごと	時刻・時間
欠け始め	18時14分
皆既食の始め	19時24分
皆既食の終わり	20時24分
食の終わり	21時34分
月食の全行程	3時間20分
皆既食の時間	1時間
欠け始めから復帰の始め	2時間10分

問題にしているのは，欠け始め(左下から)と復帰(左上から)がポイントでしたので，欠け始めの18時14分と皆既食の終わりの20時24分の2時間10分の間に90度の方角がずれたことになります．また，皆既食の始め(上側が光る)から食の終わり(右側に抜ける)の間も2時間10分となります．それで方角が90度ずれるのは約2時間ということにします．約2時間に月の見かけの回転がどの程度であるかを検討してみましょう．

月の中心(月食のときは推定の位置)に視点を常に置くことにすると，天頂方向を上として上下を定めた場合，全体的に見かけの回転をします．

秋分の頃を想定すると，北緯35度(東京)の地点で，太陽の南中高度は55度となります．月が黄道上にあると仮定すると，南中高度は同じです．下弦の月が深夜0時頃の東から昇るとき，明け方の南中するとき，西に沈むとき(実際には見えないでしょうが)の様子は図7のようになります．昇るとき，沈むときの弦の向きが水平にならず斜めになっているのは観測点が北緯0度(赤道上)ではないからです．

2時間10分の経過は，月の見かけの回転を無視することはできません．実際の回転角は時間に正確には比例しませんが，比例していると仮定すると，

55度÷6時間＝9.2度

より，約20度回転していることになります．

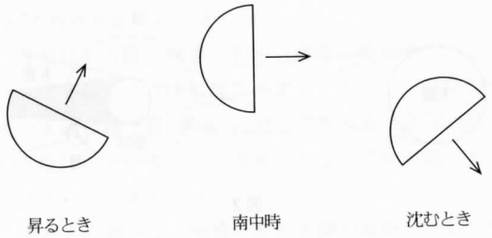


図7

やや中心に近い軌道をとり，直線ではなく曲線で，月の進行方向が，欠け始めと復帰の方向で約20度ずれている．このような図を奈良岡悟さん，高橋広幸さんが示されていました．

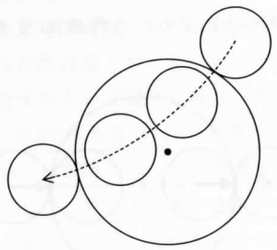


図8

また，観測地点でも方角が大きく違うことを長岡京市・クスコさんは示されていました．『天文年鑑2014』によると，10月8日の皆既月食もハワイのホノルルで見た図では皆既と生光の方向がわずかしか違っていません．これは日本では月の出の直後で月が斜めに上がってゆくので地球の自転の影響をほぼ無視してよかったのに対して，ハワイでは現地の真夜中で月が天頂に近いため，地球の自転によって月の向きが変わって見える影響が大きくきいているせいと思われます，とありました．

図8で言えば，月の進行方向がさらに大きく曲がるということです．10月8日の皆既月食は，偶然にも日本では90度に近かったということになります．

参考文献

［1］『天文年鑑2014』誠文堂新光社，42〜46ページ．
［2］『天文ガイド』誠文堂新光社，2014年10月号，11月号．
［3］藤井旭『藤井旭の月食観察ガイド』誠文堂新光社，2014年8月．
［4］国立天文台のホームページから「月食各地予報」(2015年3月31日閲覧)．
http://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/

［にしやま ゆたか／大阪経済大学情報社会学部］

出題 2

◉出題者
一松 信

初級問題　同大の球を一辺に n 個ずつ並べて正八面体状に積んだときの球の総数，すなわち**八面体数** O_n を n の式で表してください．

上級問題　正八面体の一般化として，m 次元空間内で中心を通り互いに直交する m 本の直線上に，中心から等距離にとった合計が $2m$ 個の頂点を結んでできる**正軸体**(cross-polytope)という正多胞体があります．同大の超球を一辺に n 個ずつ並べて全体を正軸体の形にしたときの総数，すなわち m **次元正軸体数** $\beta_n^{(m)}$ について考察してください．

$\beta_n^{(1)}=n$，$\beta_n^{(2)}=n^2$，$\beta_n^{(3)}=O_n$（八面体数），また $\beta_1^{(m)}=1$，$\beta_2^{(m)}=2m$ です．

$\beta_n^{(m)}$ の一般式でなくても，漸化式や m, n に関するある種の対称性などに関する結果を歓迎します．

初級問題だけでも構いませんが，できれば上級問題についても何がしかの考察を期待します．

解答 2

初級問題はごく易しい問題で読者の関心を引いたらしく，64名の応募をいただきました．年齢分布は20代5，30代4，40代5，50代26，60代18，70代4，80代2でした．「正八面体状にびっしり詰め込んで並べる」と明記しなかったので，題意を誤解して辺上の球の数だけを計算した方や，途中で計算を誤った計3名を除き，ほかはすべて「正解」として分類しました．

◉── 初級問題

正八面体の上半分は月見団子のように順次正方形の配列を積み上げた形になり，合計

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

個です．下半分は $(n-1)$ 個までの和で，合わせて

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$=\frac{1}{3}(2n^3+n) \qquad (1)$$

です．これで正しい解ですが，次のような「別解」をも論じたのは松本市・高村薫氏だけでした．

正四面体の6本の辺の中点を結んで頂点側を切り落とすと，正八面体が残ります．一辺 n の正四面体状に球を積んだ正四面体数 R_n（記号は仮のもの）は順次の三角数の和で

$$R_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \qquad (2)$$

と表されます．上述の関係から八面体数は $R_{2n-1}-4R_{n-1}$ と表されるはずです．実際これを計算すると