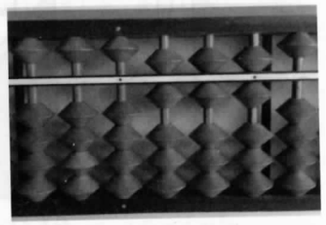
エレガントな解答をもとむ【解答】

◉出題
2016年2月号

出題 1

◉出題者
西山 豊

そろばんで1から100まで足すと答えは5050になりますが，1から順番に正の整数を足していくと，写真のように途中でたまがそろうことが3回あります．10まで足すと55に，11まで足すと66に，36まで足すと666になります．足し算をさらに続けた場合，すべての桁がそろうことがこれ以外にあるでしょうか．あればその数を，なければ存在しないことを証明してください．ただし，そろばんの桁数には制限がないものとします．



解答 1

応募者は30代2名，40代3名，50代7名，60代8名，70代2名，80代1名，90代1名の計24名でした．今回の問題は少し難しかったようで，私が要求した完全な解答をされたのは1名でした．証明は完全ではないが論旨が明確で証明の方針がしっかりしている10名を正解としました．説明が不十分な13名は不正解としました．

三角数がゾロ目になるのは1, 3, 6, 55, 66, 666の6通りで，2桁以上とすると55, 66, 666の3通りで，これ以外はありません．そろばんの珠を想定すると1から44までの和の990もゾロ目になりますが，今回はそれを考えないことにします．

◉── 下4桁までの証明

まず，証明の手順を簡潔にまとめてくださった長岡京市・クスコさんの解答を紹介します．三角数を

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)=T_n$$

とおきます．“ゾロ目”数とは

$$\frac{10^m-1}{9}\times c \qquad (m\geqq 2,\ c\text{は}1\sim 9\text{の整数})$$

で表すことができます．便宜上

$$\frac{10^m-1}{9}=1^{[m]}$$

と記し，そのc倍を$c^{[m]}$と略記します．そして，

$$c^{[m]}=T_n$$

となるときを調べます．式を変形して

$$1^{[m]}\times c=T_n$$

の両辺を8倍すると，

$$c\times 8^{[m]}=4n^2+4n=(2n+1)^2-1$$

つまり

$$c\times 8^{[m]}+1=(2n+1)^2 \qquad (1)$$

となります．右辺は奇数の平方数となります．

(1)式の右辺をみると，奇数の末位は3, 5, 7, 9, 1ですが，奇数の平方数の末位は9, 5, 9, 1, 1となり，1, 5, 9しかありません．さらに，末位が5なら下2桁は25となります．

n	$2n+1$	$(2n+1)^2$
1	3	9
2	5	25
3	7	49
4	9	81
5	11	121
6	13	169
7	15	225
8	17	289
9	19	361
10	21	441

一方，(1)式の左辺は，cが1から9まで変化しますが，$c=2, 4, 7, 9$の場合は，末位が7, 3, 7, 3となって，右辺の1, 5, 9と合致せず不可．また，$c=3, 8$の場合は，下2桁が65, 05となって，右辺の25ではないので不可．結局，許されるcは1, 5, 6のみとなります．$c=1, 5, 6$について，左辺のパターン，下2桁，奇数の平方数でそのようになるときの下4桁の可能性を表にします．

c	左辺	下2桁	下4桁の可能性
1	8…889	89	0289 1089 4489 6889
5	4…441	41	0441 0841 5041 6241
6	53…329	29	0529 0729 5329 5929

上の表で，条件を満たすのは，つぎの3ケースとなります．

$441=21^2,\quad n=10,\quad 55=T_{10}$
$529=23^2,\quad n=11,\quad 66=T_{11}$
$5329=73^2,\quad n=36,\quad 666=T_{36}$

以上は，下4桁について調べましたが，桁数を増やしていっても，条件を満たすのはこの3つしかないのかという疑問が残ります．可能性は限りなく少なくなるのですが，それを証明してほしかったのです．

マーティン・ガードナーが雑誌『サイエンティフィック・アメリカン』に，この話題を紹介しています．そして，55, 66, 666しか存在しないことがすでに証明されているとしています[1]．私は，この証明方法を知りませんでした．ネットで調べて，その論文掲載誌を見つけ，証明がエレガントな方法であること，日本ではあまり知られていないことを理由に今回の出題としました[2]．

◉── 無限桁の証明

所沢市・朝倉崇之さんは，文献[2]と同様な証明をされていますので，それを紹介します．1からkまでの整数の和T_kが，j桁の数で，各桁の数がdであるような数$dd\cdots dd$となるので，式では

$$T_k=\frac{k(k+1)}{2}=d\cdot\frac{10^j-1}{9}$$

（ただし，$1\leqq d\leqq 9,\ j\geqq 4$）

となります．kについての二次方程式を解くと

$$k=\frac{-1\pm\sqrt{1+\dfrac{8d(10^j-1)}{9}}}{2} \qquad (2)$$

となり，kが整数であるためには，根号の中の

$$1+\frac{8d(10^j-1)}{9}=Z \qquad (3)$$

が平方数であることが必要です．一方

$$\frac{k(k+1)}{2}\equiv 0, 1, 3, 5, 6, 8 \pmod{10}$$

となるので，

$d=1, 3, 5, 6, 8$

であることが必要です．以下，それぞれの場合について，Zが平方数になるかを調べていきます．

$d=1$のとき

88…889

が平方数$z^2(=Z)$になるとして

$z=d_nd_{n-1}\cdots d_2d_1d_0$

とします．z^2の1の位が9であるのでd_0は3か7です．$d_0=3$のとき，z^2の下2桁が89なのでd_1は3か8です．$d_1=8$のとき，z^2の下3桁が889なのでd_2は5です．しかし，$(d_3583)^2$の下4桁が8889となるよう

● 30代
所沢市・朝倉崇之

● 40代
東京都・日塔祐治

● 50代
静岡市・鈴木丈喜
加須市・小林国雄
京都市・清洲早紀
弘前市・澤田潤
横浜市・髙橋利之

● 60代
日立市・髙橋健吾
横浜市・水谷一

● 80代
東京都・山本彬也

● 90代
長岡京市・クスコ

な d_3 は存在しません．

以上の結果をつぎのように表記します．

3−8−5−＊

3 は d_0 に対する最初の選択で，8 は d_1 に対する可能性で，5 は d_2 に対する可能性で，＊は d_3 に対する可能性がないことを示しています．

このようにして，すべての場合をまとめるとつぎのようになります．

3−3−3−…−3−＊
3−3−8−＊
3−8−5−＊
7−1−4−＊
7−1−9−2−2−＊
7−1−9−7−5−＊
7−1−9−7−＊
7−6−1−＊
7−6−6−1−＊
7−6−6−6−1−＊
7−6−6−…−1−＊

以上より，平方して 88…889 となるような数は存在しません．

$d=3$ のとき

266…665

が平方数 z^2 になる可能性を調べます．平方して下 2 桁が 65 となるような数は存在しません．

$d=5$ のとき

44…441

が平方数 z^2 になる可能性を調べます．z^2 の 1 の位が 1 であるので d_0 は 1 か 9 です．

1−2−5−＊
1−7−2−＊
1−7−7−5−2−＊
1−7−7−5−7−1−＊
1−7−7−5−7−6−＊
9−2−2−4−2−3−5−＊
9−2−2−4−2−8−＊
9−2−2−4−7−＊
9−2−2−9−＊
9−2−7−＊
9−7−4−＊
9−7−9−2−＊
9−7−9−7−1−4−1−6−＊
9−7−9−7−1−4−6−＊
9−7−9−7−1−9−＊
9−7−9−7−6−＊

以上より，平方して 44…441 となるような数は存在しません．

$d=6$ のとき

533…3329

が平方数 z^2 になる可能性を調べます．z^2 の 1 の位が 9 であるので d_0 は 3 か 7 です．

3−2−3−＊
3−2−8−1−＊
3−2−8−6−3−4−＊
3−2−8−6−3−9−1−＊
3−2−8−6−3−9−6−2−＊
3−2−8−6−3−9−6−7−1−4−＊
3−2−8−6−9−6−7−1−9−＊
3−2−8−6−3−9−6−7−6−＊
3−2−8−6−8−＊
3−7−5−＊
7−2−4−＊
7−2−9−1−3−5−＊
7−2−9−1−8−＊
7−2−9−6−＊
7−7−1−3−1−＊
7−7−1−3−6−5−＊
7−7−1−8−＊
7−7−6−＊

以上より，平方して 533…3329 となるような数は存在しません．

$d=8$ のとき

711…1105

が平方数 z^2 になる可能性を調べます．平方して下 2 桁が 05 となるような数は存在しません．

以上より，(2)式の根号の中が平方数になることはないので，$j \geqq 4$ のすべての数に対して整数 k が存在しないことになります．

参考文献

［1］ Martin Gardiner, *The Magic Numbers of Dr. Matrix*, Prometheus Books, 1985.
［2］ David W. Ballew and Ronald C. Weger, "Repdigit Triangular Number", *J. Recreational Mathematics*, Vol. 8(2), 96-98, 1975-76.

［にしやま ゆたか／大阪経済大学情報社会学部］

出題 2

◉出題者
徳重典英

r を 2 以上の整数とし，$i=1,2,\cdots,r$ に対して，p_i は $\dfrac{r-1}{r}$ 未満の正の実数とする．このとき各 i に対して，

$$\alpha_i=(1-p_i)\alpha_i^r+p_i$$

かつ $0<\alpha_i<1$ を満たす α_i がただ一つ定まる．また，

$$\beta=\prod_{i=1}^{r}((1-p_i)\beta+p_i)$$

かつ $0<\beta<1$ を満たす β もただ一つ定まる．

問 1 $r=2$ のとき，$\beta=\alpha_1\alpha_2$ であることを示せ．
問 2 $r=3$ のとき，β と $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ の大小関係を調べよ．

なおこの問題を解くのに必要ではないが，α_i と β には次のような意味もある．コインを投げて，表なら数直線上を左に 1，裏なら右に $r-1$，ジャンプする蛙がいる．コイン C_i は，確率 p_i で表，$1-p_i$ で裏がでる．毎回このコインを投げて移動する蛙を $x=1$ で放すと，原点に仕掛けた罠にかかる確率は α_i である．一方，n を r で割った余りが j なら，n 回目のジャンプはコイン C_j（ただし余り 0 なら C_r）で決める規則に従う蛙を $x=r$ で放すと，確率 β で原点の罠にかかる．

解答 2

42 名の応募があり，内訳は 20 代 3 名，30 代 4 名，40 代 4 名，50 代 14 名，60 代 16 名，70 代 1 名でした．たくさんのご応募，どうもありがとうございました．問 1，問 2 の両方に正しく解答された 32 名を正解者としました．

問題では(1)をみたす α_i，および(2)をみたす β が，それぞれ (0, 1) 区間内にただ一つ定まることが述べてありますが，このことについても数名の方がきちんと証明されていました．そこで，芥唯一郎さんと ζ さんの議論をもとに，このことを確かめておきましょう．

まず α_i について調べるため，$0<p<\dfrac{r-1}{r}$ と仮定し，$0 \leqq x \leqq 1$ を定義域とする多項式関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-x+(1-p)x^r+p$$

と定めます．このとき $f(\alpha)=0$ となる $\alpha \in (0,1)$ がただ一つあることを示しましょう．$f(x)$ を微分して

$$f'(x)=-1+r(1-p)x^{r-1}$$

であることと $p<\dfrac{r-1}{r}$ とから，

$$f'(1)=r-1-rp=r\left(\frac{r-1}{r}-p\right)>0$$

がわかります．これと $f(0)=p>0$，$f(1)=0$，および

$$f''(x)=r(r-1)(1-p)x^{r-2}>0$$

から $y=f(x)$ のグラフの形を考えてみると，$f(x)$ は $x=0$ で正，そこから減少して，下に凸を保ったまま $x=1$ では x 軸上にあって増加中で，その概形は図 1（次ページ）のようになります．このことから，$f(\alpha)=0$ をみたす $\alpha \in (0,1)$ がただ一つあることがわかります．

次に β が一意に決まることですが，これも同様の方