

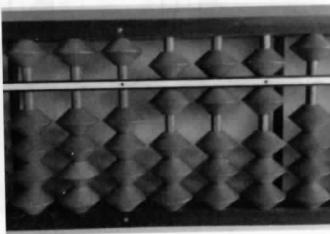
エレガントな解答

をもとむ

●出題
2016年2月号

出題
1
●出題者
西山 豊

そろばんで1から100まで足すと答えは5050になりますが、1から順番に正の整数を足していくと、写真のように途中でたまがそろうことがあります。10まで足すと55に、11まで足すと66に、36まで足すと666になります。足し算をさらに続けた場合、すべての桁がそろうことがこれ以外にあるでしょうか。あればその数を、なければ存在しないことを証明してください。ただし、そろばんの桁数には制限がないものとします。



解答
1

応募者は30代2名、40代3名、50代7名、60代8名、70代2名、80代1名、90代1名の計24名でした。今回の問題は少し難しかったようで、私が要求した完全な解答をされたのは1名でした。証明は完全ではないが論旨が明確で証明の方針がしっかりとしている10名を正解としました。説明が不十分な13名は不正解としました。

三角数がゾロ目になるのは1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 90, 105, 120, 140, 165, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 702, 740, 779, 819, 859, 901, 944, 988, 1033, 1080, 1128, 1177, 1227, 1278, 1330, 1383, 1437, 1492, 1548, 1605, 1663, 1722, 1782, 1843, 1905, 1968, 2033, 2100, 2168, 2238, 2309, 2382, 2456, 2532, 2610, 2690, 2771, 2853, 2936, 3021, 3107, 3195, 3285, 3377, 3471, 3566, 3663, 3762, 3863, 3965, 4069, 4175, 4283, 4393, 4505, 4619, 4735, 4853, 4973, 5095, 5219, 5345, 5473, 5603, 5735, 5869, 5905, 6041, 6179, 6319, 6451, 6585, 6721, 6859, 6999, 7141, 7285, 7431, 7579, 7729, 7871, 7915, 8059, 8195, 8333, 8473, 8615, 8759, 8905, 9053, 9203, 9355, 9509, 9665, 9823, 9983, 10043, 10105, 10169, 10235, 10303, 10373, 10445, 10519, 10595, 10673, 10753, 10835, 10919, 11005, 11093, 11183, 11275, 11369, 11465, 11563, 11663, 11765, 11869, 11975, 12083, 12193, 12305, 12419, 12535, 12653, 12773, 12893, 13015, 13139, 13265, 13393, 13523, 13655, 13789, 13925, 14063, 14203, 14345, 14489, 14633, 14779, 14925, 15073, 15223, 15375, 15529, 15683, 15839, 15995, 16153, 16313, 16475, 16639, 16803, 16975, 17149, 17323, 17500, 17679, 17859, 18041, 18233, 18425, 18619, 18813, 19015, 19219, 19423, 19633, 19845, 20063, 20285, 20513, 20751, 21001, 21263, 21535, 21813, 22105, 22409, 22723, 23045, 23379, 23723, 24081, 24453, 24845, 25253, 25683, 26135, 26609, 27093, 27595, 28113, 28645, 29193, 29761, 30353, 30965, 31603, 32261, 32945, 33663, 34405, 35173, 35965, 36783, 37635, 38513, 39425, 40363, 41335, 42333, 43365, 44423, 45513, 46635, 47805, 49003, 50225, 51463, 52725, 54013, 55325, 56663, 58025, 59403, 60795, 62203, 63635, 65093, 66585, 68093, 69625, 71173, 72745, 74335, 75943, 77575, 79223, 80895, 82583, 84295, 85923, 87575, 89243, 90935, 92643, 94375, 96123, 97895, 99683, 101495, 103323, 105175, 107043, 108935, 110843, 112775, 114723, 116695, 118673, 120675, 122693, 124735, 126793, 128875, 130973, 133095, 135233, 137375, 139533, 141715, 143893, 146195, 148513, 150855, 153213, 155695, 158203, 160845, 163513, 166295, 169103, 172035, 175093, 178275, 181573, 185005, 188563, 192255, 196173, 200215, 204473, 208875, 213413, 218175, 223153, 228355, 233773, 239395, 245233, 251295, 257573, 264175, 270995, 277943, 285115, 292403, 300815, 309353, 318095, 327073, 336275, 345693, 355325, 365173, 375245, 385543, 396065, 406803, 417765, 428943, 440345, 452063, 464005, 476263, 488745, 501443, 514365, 527503, 540865, 554443, 568245, 582263, 596495, 610943, 625605, 640483, 655575, 670873, 686385, 702103, 718045, 734193, 750555, 767133, 783935, 800953, 818275, 835813, 853565, 871523, 889695, 908073, 927665, 947473, 967495, 987725, 1008173, 1029745, 1051443, 1073265, 1095203, 1117265, 1140443, 1163765, 1187203, 1210765, 1234443, 1258245, 1282163, 1306205, 1330363, 1354645, 1379043, 1403565, 1428203, 1453045, 1478003, 1503165, 1528543, 1554145, 1580943, 1607945, 1635163, 1662545, 1690103, 1717805, 1745623, 1773565, 1801623, 1830805, 1860103, 1889545, 1919103, 1949805, 1980623, 2011565, 2042623, 2073805, 2105103, 2136545, 2168103, 2200805, 2233623, 2266605, 2299803, 2333245, 2366803, 2400605, 2434603, 2468805, 2503203, 2537805, 2572603, 2607605, 2642803, 2678205, 2713803, 2749605, 2785603, 2821805, 2858203, 2894805, 2931603, 2968605, 3005803, 3043205, 3080803, 3118605, 3156603, 3194805, 3233203, 3271805, 3310603, 3349605, 3389003, 3428605, 3468403, 3508505, 3548803, 3589305, 3629903, 3670605, 3711503, 3752605, 3793803, 3835205, 3876603, 3918205, 3960003, 4001905, 4043903, 4086105, 4128403, 4171805, 4215303, 4259005, 4302803, 4346805, 4391003, 4435405, 4480003, 4524805, 4569603, 4614405, 4659303, 4704305, 4749403, 4794605, 4839903, 4885305, 4930803, 4976405, 5022103, 5068005, 5114003, 5160205, 5206603, 5253105, 5300803, 5348605, 5396503, 5444605, 5492803, 5541105, 5589603, 5638205, 5687003, 5736005, 5785203, 5834605, 5884103, 5933805, 5983603, 6033605, 6083603, 6133805, 6184203, 6234805, 6285603, 6336505, 6387603, 6438805, 6480203, 6531705, 6583403, 6635305, 6687403, 6740005, 6792803, 6845805, 6899003, 6952405, 6956003, 6960005, 6964003, 6968005, 6972003, 6976005, 6980003, 6984005, 6988003, 6992005, 6996003, 7000005, 7004003, 7008005, 7012003, 7016005, 7020003, 7024005, 7028003, 7032005, 7036003, 7040005, 7044003, 7048005, 7052003, 7056005, 7060003, 7064005, 7068003, 7072005, 7076003, 7080005, 7084003, 7088005, 7092003, 7096005, 7100003, 7104005, 7108003, 7112005, 7116003, 7120005, 7124003, 7128005, 7132003, 7136005, 7140003, 7144005, 7148003, 7152005, 7156003, 7160005, 7164003, 7168005, 7172003, 7176005, 7180003, 7184005, 7188003, 7192005, 7196003, 7200005, 7204003, 7208005, 7212003, 7216005, 7220003, 7224005, 7228003, 7232005, 7236003, 7240005, 7244003, 7248005, 7252003, 7256005, 7260003, 7264005, 7268003, 7272005, 7276003, 7280005, 7284003, 7288005, 7292003, 7296005, 7300003, 7304005, 7308003, 7312005, 7316003, 7320005, 7324003, 7328005, 7332003, 7336005, 7340003, 7344005, 7348003, 7352005, 7356003, 7360005, 7364003, 7368005, 7372003, 7376005, 7380003, 7384005, 7388003, 7392005, 7396003, 7400005, 7404003, 7408005, 7412003, 7416005, 7420003, 7424005, 7428003, 7432005, 7436003, 7440005, 7444003, 7448005, 7452003, 7456005, 7460003, 7464005, 7468003, 7472005, 7476003, 7480005, 7484003, 7488005, 7492003, 7496005, 7500003, 7504005, 7508003, 7512005, 7516003, 7520005, 7524003, 7528005, 7532003, 7536005, 7540003, 7544005, 7548003, 7552005, 7556003, 7560005, 7564003, 7568005, 7572003, 7576005, 7580003, 7584005, 7588003, 7592005, 7596003, 7600005, 7604003, 7608005, 7612003, 7616005, 7620003, 7624005, 7628003, 7632005, 7636003, 7640005, 7644003, 7648005, 7652003, 7656005, 7660003, 7664005, 7668003, 7672005, 7676003, 7680005, 7684003, 7688005, 7692003, 7696005, 7700003, 7704005, 7708003, 7712005, 7716003, 7720005, 7724003, 7728005, 7732003, 7736005, 7740003, 7744005, 7748003, 7752005, 7756003, 7760005, 7764003, 7768005, 7772003, 7776005, 7780003, 7784005, 7788003, 7792005, 7796003, 7800005, 7804003, 7808005, 7812003, 7816005, 7820003, 7824005, 7828003, 7832005, 7836003, 7840005, 7844003, 7848005, 7852003, 7856005, 7860003, 7864005, 7868003, 7872005, 7876003, 7880005, 7884003, 7888005, 7892003, 7896005, 7900003, 7904005, 7908003, 7912005, 7916003, 7920005, 7924003, 7928005, 7932003, 7936005, 7940003, 7944005, 7948003, 7952005, 7956003, 7960005, 7964003, 7968005, 7972003, 7976005, 7980003, 7984005, 7988003, 7992005, 7996003, 8000005, 8004003, 8008005, 8012003, 8016005, 8020003, 8024005, 8028003, 8032005, 8036003, 8040005, 8044003, 8048005, 8052003, 8056005, 8060003, 8064005, 8068003, 8072005, 8076003, 8080005, 8084003, 8088005, 8092003, 8096005, 8100003, 8104005, 8108003, 8112005, 8116003, 8120005, 8124003, 8128005, 8132003, 8136005, 8140003, 8144005, 8148003, 8152005, 8156003, 8160005, 8164003, 8168005, 8172003, 8176005, 8180003, 8184005, 8188003, 8192005, 8196003, 8200005, 8204003, 8208005, 8212003, 8216005, 8220003, 8224005, 8228003, 8232005, 8236003, 8240005, 8244003, 8248005, 8252003, 8256005, 8260003, 8264005, 8268003, 8272005, 8276003, 8280005, 8284003, 8288005, 8292003, 8296005, 8300003, 8304005, 8308003, 8312005, 8316003, 8320005, 8324003, 8328005, 8332003, 8336005, 8340003, 8344005, 8348003, 8352005, 8356003, 8360005, 8364003, 8368005, 8372003, 8376005, 8380003, 8384005, 8388003, 8392005, 8396003, 8400005, 8404003, 8408005, 8412003, 8416005, 8420003, 8424005, 8428003, 8432005, 8436003, 8440005, 8444003, 8448005, 8452003, 8456005, 8460003, 8464005, 8468003, 8472005, 8476003, 8480005, 8484003, 8488005, 8492003, 8496005, 8500003, 8504005, 8508003, 8512005, 8516003, 8520005, 8524003, 8528005, 8532003, 8536005, 8540003, 8544005, 8548003, 8552005, 8556003, 8560005, 8564003, 8568005, 8572003, 8576005, 8580003, 8584005, 8588003, 8592005, 8596003, 8600005, 8604003, 8608005, 8612003, 8616005, 8620003, 8624005, 8628003, 8632005, 8636003, 8640005, 8644003, 8648005, 8652003, 8656005, 8660003, 8664005, 8668003, 8672005, 8676003, 8680005, 8684003, 8688005, 8692003, 8696005, 8700003, 8704005, 8708003, 8712005, 8716003, 8720005, 8724003, 8728005, 8732003, 8736005, 8740003, 8744005, 8748003, 8752005, 8756003, 8760005, 8764003, 8768005, 8772003, 8776005, 8780003, 8784005, 8788003, 8792005, 8796003, 8800005, 8804003, 8808005, 8812003, 8816005, 8820003, 8824005, 8828003, 8832005, 88360

な d_3 は存在しません。

以上の結果をつぎのように表記します。

3-8-5-*

3 は d_0 に対する最初の選択で、8 は d_1 に対する可能性で、5 は d_2 に対する可能性で、* は d_3 に対する可能性がないことを示しています。

このようにして、すべての場合をまとめるとつぎのようになります。

3-3-3-…-3-*

3-3-8-*

3-8-5-*

7-1-4-*

7-1-9-2-2-*

7-1-9-7-5-*

7-1-9-7-*

7-6-1-*

7-6-6-1-*

7-6-6-6-1-*

7-6-6-…-1-*

以上より、平方して 88…889 となるような数は存在しません。

$d = 3$ のとき

266…665

が平方数 z^2 になる可能性を調べます。平方して下2桁が 65 となるような数は存在しません。

$d = 5$ のとき

44…441

が平方数 z^2 になる可能性を調べます。 z^2 の1の位が1であるので d_0 は1か9です。

1-2-5-*

1-7-2-*

1-7-7-5-2-*

1-7-7-5-7-1-*

1-7-7-5-7-6-*

9-2-2-4-2-3-5-*

9-2-2-4-2-8-*

9-2-2-4-7-*

9-2-2-9-*

9-2-7-*

9-7-4-*

9-7-9-2-*

9-7-9-7-1-4-1-6-*

9-7-9-7-1-4-6-*

9-7-9-7-1-9-*

9-7-9-7-6-*

以上より、平方して 44…441 となるような数は存在しません。

$d = 6$ のとき

533…3329

が平方数 z^2 になる可能性を調べます。 z^2 の1の位が9であるので d_0 は3か7です。

3-2-3-*

3-2-8-1-*

3-2-8-6-3-4-*

3-2-8-6-3-9-1-*

3-2-8-6-3-9-6-2-*

3-2-8-6-3-9-6-7-1-4-*

3-2-8-6-9-6-7-1-9-*

3-2-8-6-3-9-6-7-6-*

3-2-8-6-8-*

3-7-5-*

7-2-4-*

7-2-9-1-3-5-*

7-2-9-1-8-*

7-2-9-6-*

7-7-1-3-1-*

7-7-1-3-6-5-*

7-7-1-8-*

7-7-6-*

以上より、平方して 533…3329 となるような数は存在しません。

$d = 8$ のとき

711…1105

が平方数 z^2 になる可能性を調べます。平方して下2桁が 05 となるような数は存在しません。

以上より、(2)式の根号の中が平方数になることはないので、 $j \geq 4$ のすべての数に対して整数 k が存在しないことになります。

参考文献

- [1] Martin Gardner, *The Magic Numbers of Dr. Matrix*, Prometheus Books, 1985.

- [2] David W. Ballew and Ronald C. Weger, "Repdigit Triangular Number", *J. Recreational Mathematics*, Vol. 8(2), 96-98, 1975-76.

[にしやま ゆたか／大阪経済大学情報社会学部]



42名の応募があり、内訳は20代3名、30代4名、40代4名、50代14名、60代16名、70代1名でした。たくさんのご応募、どうもありがとうございました。問1、問2の両方に正しく解答された32名を正解者としました。

問題では(1)をみたす α_i 、および(2)をみたす β が、それぞれ(0,1)区间内にただ一つ定まることが述べてあります。このことについても数名の方がきちんと証明されていました。そこで、芥唯一郎さんとささんの議論をもとに、このことを確かめておきましょう。

まず α_i について調べるため、 $0 < p < \frac{r-1}{r}$ と仮定し、 $0 \leq x \leq 1$ を定義域とする多項式関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -x + (1-p)x^r + p$$

と定めます。このとき $f(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in (0,1)$ がただ一つあることを示しましょう。 $f(x)$ を微分して

$$f'(x) = -1 + r(1-p)x^{r-1}$$

であることと $p < \frac{r-1}{r}$ とから、

$$f'(1) = r-1-rp = r\left(\frac{r-1}{r}-p\right) > 0$$

がわかります。これと $f(0) = p > 0$ 、 $f(1) = 0$ 、および

$$f''(x) = r(r-1)(1-p)x^{r-2} > 0$$

から $y = f(x)$ のグラフの形を考えてみると、 $f(x)$ は $x = 0$ で正、そこから減少して、下に凸を保ったまま $x = 1$ では x 軸上にあって増加中で、その概形は図1(次ページ)のようになります。このことから、 $f(\alpha) = 0$ をみたす $\alpha \in (0,1)$ がただ一つあることがわかります。

次に β が一意に決まるこですが、これも同様の方