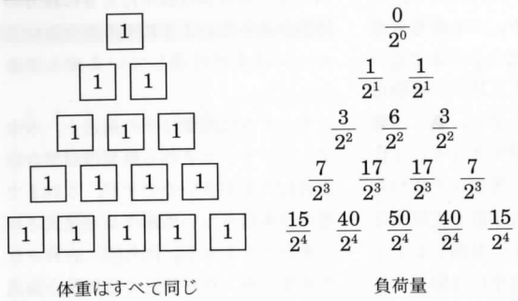
エレガントな解答をもとむ【解答】

◉出題
2017年7月号

出題 1

◉出題者
西山 豊



生徒たちが組体操で人間ピラミッド(俵積み)を作ります．生徒の体重をすべて同じで1としたとき，

- 上から1段目の生徒にかかる負荷量は0,
- 上から2段目の生徒にかかる負荷量は $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$,
- 上から3段目の生徒にかかる負荷量は

$$\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{\frac{1}{2}+1}{2}+\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{6}{4},$$

$$\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}$$

のように計算できます．

p を奇素数とするとき，上から p 段目の負荷量の分子は，すべて p で割り切れることを証明してください．

この事実は宮永望さん(日本数学協会)が発見されました．

解答 1

応募者は20代2名，30代4名，40代2名，50代12名，60代16名，80代1名の計37名でした．漸化式から一般式を求めた12名，母関数による証明の10名，その他の9名の計31名を正解としました．かなりの計算力がいる問題だったと思います．模範解答として2つの解答を示します．

◉—1 漸化式から一般式

まず，名古屋市・山本長晴さんの解答を参考に負荷量の分子の一般式を求める方法を紹介します．

I　n 段目の分母は 2^{n-1} である．n 段目の左から k 番目の分子を $a(n,k)$ とする．たとえば

$a(1,1)=0,$

$a(2,1)=1,\quad a(2,2)=1,$

$a(3,1)=3,\quad a(3,2)=6,\quad a(3,3)=3$

である．まず $a(n,k)$ を $k=1,2,3,4$ について具体的に求めてみる．

$n\geqq 2$ で $a(n,1)=a(n-1,1)+2^{n-2}$ だから

$$a(n,1)=2^{n-1}-1 \tag{1}$$

となる．また，対称性により

$$a(n,n)=a(n,1)=2^{n-1}-1$$

である．

$n\geqq 3,\ 2\leqq k\leqq n-1$ では漸化式

$$a(n,k)=a(n-1,k-1)+a(n-1,k)+2^{n-1} \tag{2}$$

が成り立つ．

$k=2$ のとき

$$\begin{aligned}a(n,2)&=a(n-1,1)+a(n-1,2)+2^{n-1}\\&=a(n-1,2)+2^{n-1}+2^{n-2}-1\\&\qquad((1)\text{より } a(n-1,1)=2^{n-2}-1)\\&=a(n-1,2)+3\cdot 2^{n-2}-1\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}a(n,2)&=a(2,2)+\sum_{i=1}^{n-2}(3\cdot 2^i-1)\\&=3(2^{n-1}-1)-n\end{aligned} \tag{3}$$

となる．

$k=3$ のとき

$$\begin{aligned}a(n,3)&=a(n-1,2)+a(n-1,3)+2^{n-1}\\&=a(n-1,3)+2^{n-1}\\&\quad+3(2^{n-2}-1)-(n-1)\qquad((3)\text{より})\\&=a(n-1,3)+5\cdot 2^{n-2}-(n+2)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}a(n,3)&=a(3,3)+\sum_{i=2}^{n-2}5\cdot 2^i-\sum_{i=4}^{n}(i+2)\\&=5(2^{n-1}-1)-\frac{1}{2}n(n+5)\end{aligned} \tag{4}$$

となる．

$k=4$ のとき

$$\begin{aligned}a(n,4)&=a(n-1,3)+a(n-1,4)+2^{n-1}\\&=a(n-1,4)+2^{n-1}\\&\quad+5(2^{n-2}-1)-\frac{1}{2}(n-1)(n+4)\\&\quad((4)\text{より})\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}a(n,4)&=a(4,4)+\sum_{i=3}^{n-2}7\cdot 2^i-\sum_{i=5}^{n}\left(\frac{1}{2}i^2+\frac{3}{2}i+3\right)\\&=7(2^{n-1}-1)-\frac{1}{6}n(n^2+6n+23)\end{aligned} \tag{5}$$

となる．

II　ここで，二項係数 $\binom{n}{i}$ は

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{(n-1)!1!}=n$$

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{(n-2)!2!}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}$$

$$\binom{n}{3}=\frac{n!}{(n-3)!3!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n^3-3n^2+2n}{6}$$

であるから，(3), (4), (5)の最後の項は二項係数に置き換えることができる．

$$n=\binom{n}{1}$$

$$\frac{1}{2}n(n+5)=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{6n}{2}=\binom{n}{2}+3\binom{n}{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}n(n^2+6n+23)&=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{9n^2+21n}{6}\\&=\binom{n}{3}+\frac{3n^2+7n}{2}\\&=\binom{n}{3}+3\times\frac{n(n-1)}{2}+\frac{10n}{2}\\&=\binom{n}{3}+3\binom{n}{2}+5\binom{n}{1}\end{aligned}$$

となる．

そこで，$n\geqq 5,\ 2\leqq k\leqq n-1$ で次の仮説をたてる．

$$\begin{aligned}a(n,k)&=(2k-1)(2^{n-1}-1)\\&\quad-\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\binom{n}{k-i}\end{aligned} \tag{A}$$

この仮説は数学的帰納法により証明できる．(2)より

$$a(n+1,k)=a(n,k-1)+a(n,k)+2^n$$

(A)より

$$\begin{aligned}&=(2k-3)(2^{n-1}-1)\\&\quad-\sum_{i=1}^{k-2}(2i-1)\binom{n}{k-1-i}\\&\quad+(2k-1)(2^{n-1}-1)\\&\quad-\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\binom{n}{k-i}+2^n\\&=(2k-1)(2^n-1)-(2k-3)\\&\quad-\sum_{i=1}^{k-2}(2i-1)\binom{n+1}{k-i}-(2k-3)\binom{n}{1}\\&=(2k-1)(2^n-1)-\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\binom{n+1}{k-i}\end{aligned}$$

検算は次のとおり．

$$\begin{aligned}&(2k-3)(2^{n-1}-1)+(2k-1)(2^{n-1}-1)+2^n\\&=2k\cdot 2^{n-1}-2k-3\cdot 2^{n-1}+3\\&\quad+2k\cdot 2^{n-1}-2k-2^{n-1}+1+2^n\\&=2k\cdot 2^n-2k-2^n+1-2k+3\\&=(2k-1)(2^n-1)-(2k-3)\\&\sum_{i=1}^{k-2}(2i-1)\binom{n}{k-1-i}+\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\binom{n}{k-i}\end{aligned}$$

● 20代
東京都・高橋祐介
大津市・栗原悠太郎

● 30代
青梅市・清水俊宏
千葉市・石野知宏
横浜市・山本高行
松山市・冨永昌以

● 40代
奈良県・井上明

● 50代
芦屋市・ぬるぽ
桜川市・鈴木康介
箕面市・斎藤博
京都市・清洲早紀
横浜市・松本誠
浦安市・川辺治之
桑名市・山本秀平
新潟市・中本一人
東京都・浜田忠久

● 60代
観音寺市・香川小三元
静岡市・鈴木丈喜
志木市・細野源蔵
萩市・髙橋秀明
福井市・森茂
三条市・加ト
東京都・渡邊芳行
東京都・ξ
横浜市・水谷一
横浜市・髙橋利之
高崎市・高橋広幸
松戸市・広川久晴
長崎市・城崎尚人
名古屋市・山本長晴

● 80代
飯田市・小林博省

$$= \sum_{i=1}^{k-2}(2i-1)\binom{n}{k-1-i}+\sum_{i=1}^{k-2}(2i-1)\binom{n}{k-i}$$

$$+(2k-3)\binom{n}{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-2}(2i-1)\binom{n+1}{k-i}+(2k-3)\binom{n}{1}$$

$$(2k-3)+(2k-3)\binom{n}{1}$$

$$= (2k-3)\binom{n}{0}+(2k-3)\binom{n}{1}$$

$$= (2k-3)\binom{n+1}{1}$$

$$= \sum_{i=k-1}^{k-1}(2i-1)\binom{n+1}{k-i}$$

$$\sum_{i=1}^{k-2}(2i-1)\binom{n+1}{k-i}+\sum_{i=k-1}^{k-1}(2i-1)\binom{n+1}{k-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\binom{n+1}{k-i}$$

$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ を使用した．

よって $n \geqq 5$ でも(A)は成立する．

Ⅲ　以上より

$$a(n,1) = 2^{n-1}-1$$

$$a(n,2) = 3(2^{n-1}-1)-\binom{n}{1}$$

$$a(n,3) = 5(2^{n-1}-1)-\binom{n}{2}-3\binom{n}{1}$$

$$a(n,4) = 7(2^{n-1}-1)-\binom{n}{3}-3\binom{n}{2}-5\binom{n}{1}$$

……

$$a(n,k) = (2k-1)(2^{n-1}-1)-\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\binom{n}{k-i}$$

……

$$a(n,n-1) = 3(2^{n-1}-1)-\binom{n}{1}$$

$$a(n,n) = 2^{n-1}-1$$

となる．

$n=p$（奇素数）とすると，$2^{p-1}-1$ は p の倍数（フェルマーの小定理）であり，$\binom{p}{i}$ $(1 \leqq i \leqq p-1)$ も p の倍数であるから，p 段目の負荷量の分子がすべて p で割り切れることになる．

◉―2　母関数による証明

つぎに，観音寺市・香川小三元さんの解答を参考に母関数による証明を紹介します．

上から n 段目の負荷量を係数にもつ $(n-1)$ 次多項式を $f_{n-1}(x)$ とする．

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{3}{2^2}x^2+\frac{6}{2^2}x+\frac{3}{2^2}$$

$$f_3(x) = \frac{7}{2^3}x^3+\frac{17}{2^3}x^2+\frac{17}{2^3}x+\frac{7}{2^3}$$

等々とする．

$$f_2(x) = \frac{3}{2^2}x^2+\frac{6}{2^2}x+\frac{3}{2^2} = \frac{x+1}{2}\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{x+1}{2}f_1(x)+\frac{x+1}{2}(x+1)$$

$$f_3(x) = \frac{7}{2^3}x^3+\frac{17}{2^3}x^2+\frac{17}{2^3}x+\frac{7}{2^3}$$

$$= \frac{x+1}{2}\left(\frac{7}{2^2}x^2+\frac{10}{2^2}x+\frac{7}{2^2}\right)$$

$$= \frac{x+1}{2}\left(\frac{3}{2^2}x^2+\frac{6}{2^2}x+\frac{3}{2^2}\right)$$

$$+\frac{x+1}{2}\left(\frac{4}{2^2}x^2+\frac{4}{2^2}x+\frac{4}{2^2}\right)$$

$$= \frac{x+1}{2}f_2(x)+\frac{x+1}{2}(x^2+x+1)$$

が成り立つ．一般に，$f_n(x)$ と $f_{n-1}(x)$ の関係は与えられた規則より

$$f_n(x) = \frac{x+1}{2}f_{n-1}(x)$$

$$+\frac{x+1}{2}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$$

となる．

すなわち，

$$f_n(x) = \frac{(x+1)}{2}f_{n-1}(x)+\frac{(x+1)}{2}\cdot\frac{x^n-1}{x-1} \qquad \text{(B)}$$

$$\left(\text{ただし } f_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)\right)$$

という漸化式が得られる．

漸化式(B)の特解として

$$P_n(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}Q_n(x)$$

（$Q_n(x)$ は多項式）があったとすると

$$\frac{x+1}{(x-1)^2}Q_n(x)$$

$$= \frac{x+1}{2}\cdot\frac{x+1}{(x-1)^2}Q_{n-1}(x)+\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x^n-1}{x-1}$$

すなわち，

$$Q_n(x) = \frac{x+1}{2}Q_{n-1}(x)+\frac{x-1}{2}\cdot(x^n-1)$$

これを満たす $Q_n(x)$ として

$$Q_n(x) = x^{n+1}+1$$

がとれる．なぜなら

$$x^{n+1}+1 = \frac{x+1}{2}(x^n+1)+\frac{x-1}{2}\cdot(x^n-1)$$

だからである．したがって(B)の特解として

$$P_n(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}\cdot(x^{n+1}+1)$$

がある．

$$f_n(x)-P_n(x) = \frac{x+1}{2}(f_{n-1}(x)-P_{n-1}(x))$$

となり

$$f_n(x)-P_n(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1}(f_1(x)-P_1(x))$$

$$= \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}(x+1)-\frac{x+1}{(x-1)^2}\cdot(x^2+1)\right)$$

$$= \frac{(x+1)^n}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\right)$$

$$= -\frac{(x+1)^{n+2}}{2^n(x-1)^2}$$

ゆえに

$$f_n(x) = \frac{(x+1)(x^{n+1}+1)}{(x-1)^2}-\frac{(x+1)^{n+2}}{2^n(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2}\left\{(x+1)(x^{n+1}+1)-\frac{(x+1)^{n+2}}{2^n}\right\}$$

$f_n(x)$ の分母は 2^n であるので，

$$2^n f_n(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\{2^n(x+1)(x^{n+1}+1)-(x+1)^{n+2}\}$$

の係数が負荷量の分子を表す．

p を奇素数として p 段目の負荷量の分子は

$$2^{p-1} f_{p-1}(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\{2^{p-1}(x+1)(x^p+1)-(x+1)^{p+1}\}$$

の係数である．

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$$

を項別微分して

$$\frac{1}{(x-1)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

となるので，

$$\{2^{p-1}(x+1)(x^p+1)-(x+1)^{p+1}\} \times(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)$$

を展開して $x^0, x^1, x^2, \cdots, x^{p-1}$ の係数を考える．たとえば，$p=3$ のときは，

$$\begin{aligned}2^2 f_2(x) &= \{2^2(x+1)(x^3+1)-(x+1)^4\} \times(1+2x+3x^2+\cdots)\\ &= (3x^4-6x^2+3)(1+2x+3x^2+\cdots)\\ &= (3-6x^2+3x^4)(1+2x+3x^2+\cdots)\\ &= (3-6x^2+3x^4)+(6x-12x^3+6x^5)\\ &\quad +(9x^2-18x^4+9x^6)+\cdots\\ &= 3+6x+3x^2\end{aligned}$$

となる．

前の｛　｝の中は，

$$\begin{aligned}&2^{p-1}(x+1)(x^p+1)-(x+1)^{p+1}\\ &= 2^{p-1}x^{p+1}+2^{p-1}x^p+2^{p-1}x+2^{p-1}\\ &\quad -x^{p+1}-(p+1)x^p\\ &\quad -\binom{p+1}{2}x^{p-1}-\binom{p+1}{3}x^{p-2}-\cdots\\ &\quad -\binom{p+1}{p-1}x^2-(p+1)x-1\\ &= (2^{p-1}-1)x^{p+1}+(2^{p-1}-1)x^p-px^p\\ &\quad +(2^{p-1}-1)x-px+(2^{p-1}-1)\\ &\quad -\binom{p+1}{2}x^{p-1}-\binom{p+1}{3}x^{p-2}-\cdots\\ &\quad -\binom{p+1}{p-1}x^2\end{aligned}$$

となる．

フェルマーの小定理より $2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ だから，$(2^{p-1}-1)$ を係数にもつ項はすべて p で割り切れる．$-px^p, -px$ は p で割り切れる．また二項係数は

$$\binom{p+1}{2}\equiv\binom{p+1}{3}\equiv\cdots\equiv\binom{p+1}{p-1}\equiv 0 \pmod p$$

となるので，｛　｝の中の係数はすべて p で割り切れる．これに $(1+2x+3x^2+\cdots)$ をかけて求めた項の係数もすべて p で割り切れる．

つまり奇素数 p 段目の負荷量の分子はすべて p で割り切れる．

◉── 付記

2015 年から 2016 年にかけて運動会での組体操における事故が社会問題になり，私は負荷量計算をすることで，巨大ピラミッドの危険性を訴えました[1]．この記事をご覧になった日本数学協会の宮永望さんが，偶然にも出題のような性質を発見されました．

ご存知のように左右両端の負荷量の分子についてはフェルマーの小定理によって簡単に証明できます．内部へ進んで 2 列目も何とか証明できますが，段数が増えて内部へ行けば行くほど式は複雑になります．11 段目にもなると，ほとんどお手上げの状態です．私はどのように証明するのか謎でした．今回，素晴らしい解答を寄せていただいた応募者には感謝します．

参考文献

［1］ 西山豊「組体操・人間ピラミッドの巨大化を考える」『数学文化』No. 25，12-35，2016. 3

［にしやま ゆたか／大阪経済大学情報社会学部］

出題 2

◉出題者
中川暢夫＋小田文仁

等式

$$p+1=2^m$$

を満たす素数 p は，$1\leqq m\leqq 200$ において 12 個存在します．今回の問題では，この等式の類似

$$p^n+1=a^m$$

を考えてみましょう．ここで p は素数で a, n, m は自然数，$a\neq 2$，$m\neq 1$ とします．この等式を満たす p, a, n, m をすべて求めてください，というのが問題です．

解答 2

今回，20 代 2 名，30 代 5 名，40 代 5 名，50 代 10 名，60 代 21 名，合計 43 名の方々から解答をいただきました．

論理の展開に飛躍があったり，大事なところでの計算ミスがあったりで惜しくも正解にできなかった解答が 7 つありました．また論理の展開はともかく，解が $(p, a, n, m)=(2, 3, 3, 2)$ だけに限られるとの記述は 42 名に及んでいました．

筆者達は知りませんでしたが，今回の問題の類似問題が 1999 年 3 月号のこの欄に出題されていることを解答者の一人，千葉市・石野知宏さんに教えていただきました．「2 以上の整数 n, p, q に対し等式 $(n+1)^p-n^q=1$ を満たす n, p, q は $(n, p, q)=(2, 2, 3)$ に限られることを示せ」(中村滋氏出題) という問題でした．

◉── 解答

m が偶数であることがわかれば，後は容易です．$m=2k$ として $p^n=(a^k+1)(a^k-1)$．p が素数であることより $p^u=a^k+1$，$p^v=a^k-1$ となる非負整数 u, v が存在します．すると $p^u-p^v=2$ から $p=2$，$u=2$，$v=1$ か $p=3$，$u=1$，$v=0$ のいずれかですが，後者は $a\neq 2$ に反します．

以下に m が偶数になることの証明を 3 通りやってみます．本質的にはみな同じです．

最初は概ね横浜市・水谷一さんの解答に沿って見ていきます．

解答例 1　$m>1$ より $m=qk$ となる素数 q と整数 k が存在する．$b=a^k$ とおくと，

$$\begin{aligned}p^n &= a^m-1=b^q-1\\ &= (b-1)(b^{q-1}+b^{q-2}+\cdots+b+1).\end{aligned}$$

$b\geqq a>2$ より，$p^{\ell_1}=b-1$，$p^{\ell_2}=b^{q-1}+b^{q-2}+\cdots+b+1$ で $\ell_1<\ell_2$ となる正の整数 ℓ_1, ℓ_2 が存在する．上記の 2 番目の等式に $b=p^{\ell_1}+1$ を代入すると

● 20 代
大津市・栗原悠太郎
札幌市・名畑壱志

● 30 代
青梅市・清水俊宏
千葉市・石野知宏

● 40 代
西宮市・岡本崇
福井県・小松邦嘉

● 50 代
東京都・久保田啓介
たつの市・松下賢二
横浜市・松本誠
東京都・浜田忠久

● 60 代
名古屋市・山本長晴
東京都・ξ
横浜市・水谷一
福知山市・安達史郎
松戸市・広川久晴
埼玉県・湊孝夫
奈良県・野崎伸治
福井市・森茂