はじめに，△ABC と直線 B′C′ に関してメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{BA_0}{A_0C}\cdot\frac{CL_C}{L_CA}\cdot\frac{AL_B}{L_BB}=\frac{BA_0}{A_0C}\cdot\frac{b+q}{q}\cdot\frac{r}{c+r}=1$$

となり，同様に，△ABC と直線 C′A′，および，△ABC と直線 A′B′ にもメネラウスの定理を用いると，

$$\frac{CB_0}{B_0A}\cdot\frac{AM_A}{M_AB}\cdot\frac{BM_C}{M_CC}=\frac{CB_0}{B_0A}\cdot\frac{c+r}{r}\cdot\frac{p}{a+p}=1,$$

$$\frac{AC_0}{C_0B}\cdot\frac{BN_B}{N_BC}\cdot\frac{CN_A}{N_AA}=\frac{AC_0}{C_0B}\cdot\frac{a+p}{p}\cdot\frac{q}{b+q}=1$$

となります．上記の3つの式を掛け合わせれば，

$$\frac{BA_0}{A_0C}\cdot\frac{CB_0}{B_0A}\cdot\frac{AC_0}{C_0B}=1$$

が得られ，これはメネラウスの定理の逆により，A_0, B_0, C_0 が1直線上にあることを主張しますから，証明が終了します．まさにエレガントな解答だと思います．

さらに，木下氏からは，この状況で，L_B, L_C, M_C, M_A, N_A, N_B の6点が同一2次曲線上にのっている，など驚くべき系も多数紹介いただきました．脱帽するほかありません．

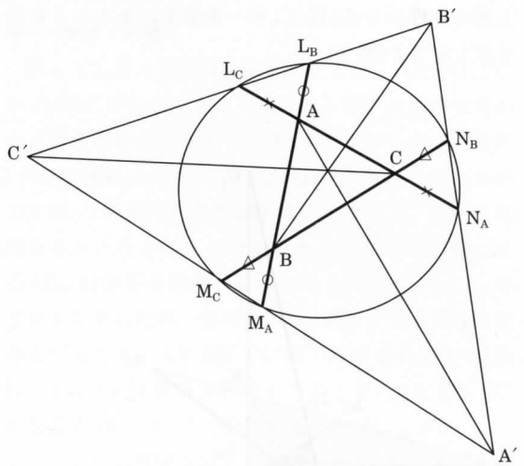


図6　木下氏の拡張と系

参考文献

［1］ T. Kouřilovà and O. Röschel, "A remark on Feuerbach hyperbolas", *J. Geom.*, 104(2013), pp. 317-328.

［2］ 野口貴規，「三角形に定義される2次曲線 ── 重心座標と双対原理を用いて」，兵庫教育大学大学院学校教育研究科，平成29年度修士論文．

［はまなか ひろあき／兵庫教育大学教育学部］

出題 2

◉出題者
西山 豊

足し算を演算子とする縦10×横10の百ます計算の問題を作ります．図のように左の列を

$\{A_i\}$　$(1 \leqq i \leqq 10)$,

上の行を

$\{B_j\}$　$(1 \leqq j \leqq 10)$

とし，足し算の答えを

$\{C_{i,j}=A_i+B_j\}$　$(1 \leqq i, j \leqq 10)$

としたとき，100個のます目の数 $\{C_{i,j}\}$ に，0から99までのすべての数字が，重複することなく1回だけ現れるように $\{A_i\}$ と $\{B_j\}$ の値を決めてください．このような条件を満たす $\{A_i\}$ と $\{B_j\}$ の組合せをすべて求めてください．ただし，A_i, B_j は0および自然数(非負整数)とします．

+	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
A_1										
A_2										
A_3										
A_4										
A_5										
A_6										
A_7										
A_8										
A_9										
A_{10}										

解答 2

応募者は9歳以下1名，10代1名，20代3名，30代4名，40代9名，50代22名，60代26名，70代4名，80代1名，90代1名の計72名でした．7通りとするものを正解とし，正解者は39名でした．参考までに，1通りとしたものが8名，2通りが4名，3通りが11名，4通りが2名，5通りが5名，6通りが2名でした．

A と B の組合せは次の7通りです．

（1） $A=\{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$
　　 $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

（2） $A=\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$
　　 $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 50, 51, 52, 53, 54\}$

（3） $A=\{0, 5, 10, 15, 20, 50, 55, 60, 65, 70\}$
　　 $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 25, 26, 27, 28, 29\}$

（4） $A=\{0, 5, 20, 25, 40, 45, 60, 65, 80, 85\}$
　　 $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14\}$

（5） $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
　　 $B=\{0, 1, 20, 21, 40, 41, 60, 61, 80, 81\}$

（6） $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 50, 52, 54, 56, 58\}$
　　 $B=\{0, 1, 10, 11, 20, 21, 30, 31, 40, 41\}$

（7） $A=\{0, 2, 20, 22, 40, 42, 60, 62, 80, 82\}$
　　 $B=\{0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17\}$

A と B を入れ替え，それぞれの順序を入れ替えると，

$7\times2\times10!\times10!$　通り

の組合せということになりますが，7通りということで説明していきます．

解答はブロックに分割する方法と母関数による方法があり，これはいずれも私が用意していた解答でした［1］．

●9歳以下
西宮市・髙岡奈紗

●10代
東村山市・宮澤拓眞

●20代
札幌市・髙澤秀人
東京都・相孝佳

●30代
さいたま市・井上昌一
大津市・栗原悠太郎
青梅市・清水俊宏
横浜市・山本高行

●40代
福井県・小松邦嘉
奈良県・井上明
八王子市・牧野健一
京都市・飯田博彰
八王子市・佐々木和美
西宮市・髙岡清治

●50代
東京都・久保田啓介
岩手県・$\rho\alpha31$
横浜市・土屋芳浩
芦屋市・ぬるぽ
箕面市・斎藤博
福山市・山本哲也
横浜市・松本誠
カナダ・山田知己
秋田市・千葉隆
姫路市・日髙好光
さいたま市・河村直彦
藤井寺市・藤田幸久
豊前市・林道宏

●60代
志木市・細野源蔵
福井市・森茂
京都市・尾本親治
加須市・小林国雄
東京都・ξ
萩市・髙橋秀明
高崎市・高橋広幸
横浜市・山田正昭
三鷹市・石川和弘
横浜市・水谷一
川崎市・河原崎純一
松戸市・広川久晴

◉── ブロックに分割する方法

10×10 のマス目の中で 0 から 99 までの数を順にたどっていくと，10×10 のマス目は同じ形のブロックに分割されることが分かります．そこで 10×10 = 100 のマス目をブロックに分割して考えます．10 の約数は 1, 2, 5, 10 の 4 つありますが，重複をなくすと図 1 の 7 つの分割パターンがあります．

ブロック内では左から右に，改行して上から下に進むとします．ブロックからブロックへの移動も左のブロックから右のブロックに，上のブロックから下のブロックに進むとしておきます．

この方法で 7 通りの解を見つけたのは，志木市・細野源蔵さんを始め 29 名でした(次ページ図 2 各段左)．100 マスの左上隅を 0，右下隅を 99 に固定すると，0 から 99 までの一筆書きの経路に例えることもできます(図 2 各段右)．

◉── 母関数を使う方法

この方法で 7 通りを見つけたのは，さいたま市・井上昌一さんを始め 10 名でした．

$$a(x) = x^{A_1}+x^{A_2}+\cdots+x^{A_{10}}$$
$$b(x) = x^{B_1}+x^{B_2}+\cdots+x^{B_{10}}$$

とおくと

$$a(x)\times b(x) = c(x)$$
$$c(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{99}$$

となるので，ここから $a(x)$ と $b(x)$ を求めます．これらの多項式は母関数または生成関数とよばれています．$c(x)$ はこのままでは因数分解しにくいので，両辺に $(1-x)$ を掛け，

$$c(x)\times(1-x) = 1-x^{100}$$

として，$1-x^{100}$ を因数分解し，その後 $(1-x)$ で割ると，

$$\begin{aligned} c(x) = {} & (1+x)(1+x^2) \\ & \times(1+x+x^2+x^3+x^4) \\ & \times(1-x+x^2-x^3+x^4) \\ & \times(1-x^2+x^4-x^6+x^8) \\ & \times(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}) \\ & \times(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20}) \\ & \times(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40}) \end{aligned}$$

となり，$c(x)$ は 8 項に因数分解されたことになりま

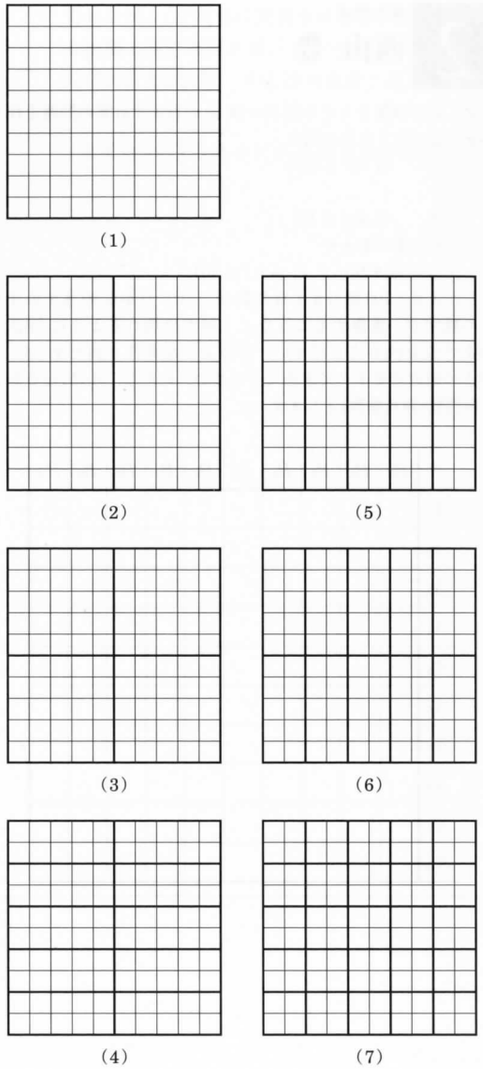
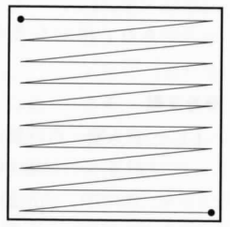


図 1　7 つの分割パターン

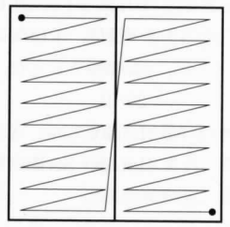
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(1)



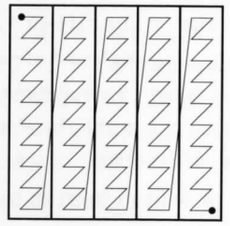
+	0	1	2	3	4	50	51	52	53	54
0	0	1	2	3	4	50	51	52	53	54
5	5	6	7	8	9	55	56	57	58	59
10	10	11	12	13	14	60	61	62	63	64
15	15	16	17	18	19	65	66	67	68	69
20	20	21	22	23	24	70	71	72	73	74
25	25	26	27	28	29	75	76	77	78	79
30	30	31	32	33	34	80	81	82	83	84
35	35	36	37	38	39	85	86	87	88	89
40	40	41	42	43	44	90	91	92	93	94
45	45	46	47	48	49	95	96	97	98	99

(2)



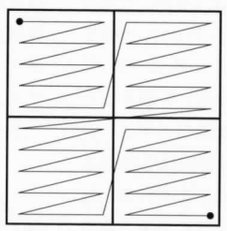
+	0	1	20	21	40	41	60	61	80	81
0	0	1	20	21	40	41	60	61	80	81
2	2	3	22	23	42	43	62	63	82	83
4	4	5	24	25	44	45	64	65	84	85
6	6	7	26	27	46	47	66	67	86	87
8	8	9	28	29	48	49	68	69	88	89
10	10	11	30	31	50	51	70	71	90	91
12	12	13	32	33	52	53	72	73	92	93
14	14	15	34	35	54	55	74	75	94	95
16	16	17	36	37	56	57	76	77	96	97
18	18	19	38	39	58	59	78	79	98	99

(5)



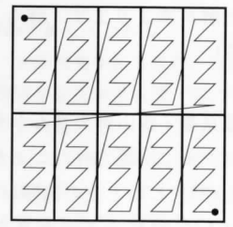
+	0	1	2	3	4	25	26	27	28	29
0	0	1	2	3	4	25	26	27	28	29
5	5	6	7	8	9	30	31	32	33	34
10	10	11	12	13	14	35	36	37	38	39
15	15	16	17	18	19	40	41	42	43	44
20	20	21	22	23	24	45	46	47	48	49
50	50	51	52	53	54	75	76	77	78	79
55	55	56	57	58	59	80	81	82	83	84
60	60	61	62	63	64	85	86	87	88	89
65	65	66	67	68	69	90	91	92	93	94
70	70	71	72	73	74	95	96	97	98	99

(3)



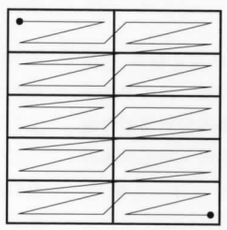
+	0	1	10	11	20	21	30	31	40	41
0	0	1	10	11	20	21	30	31	40	41
2	2	3	12	13	22	23	32	33	42	43
4	4	5	14	15	24	25	34	35	44	45
6	6	7	16	17	26	27	36	37	46	47
8	8	9	18	19	28	29	38	39	48	49
50	50	51	60	61	70	71	80	81	90	91
52	52	53	62	63	72	73	82	83	92	93
54	54	55	64	65	74	75	84	85	94	95
56	56	57	66	67	76	77	86	87	96	97
58	58	59	68	69	78	79	88	89	98	99

(6)



+	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14
0	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	15	16	17	18	19
20	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34
25	25	26	27	28	29	35	36	37	38	39
40	40	41	42	43	44	50	51	52	53	54
45	45	46	47	48	49	55	56	57	58	59
60	60	61	62	63	64	70	71	72	73	74
65	65	66	67	68	69	75	76	77	78	79
80	80	81	82	83	84	90	91	92	93	94
85	85	86	87	88	89	95	96	97	98	99

(4)



+	0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
0	0	1	4	5	8	9	12	13	16	17
2	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19
20	20	21	24	25	28	29	32	33	36	37
22	22	23	26	27	30	31	34	35	38	39
40	40	41	44	45	48	49	52	53	56	57
42	42	43	46	47	50	51	54	55	58	59
60	60	61	64	65	68	69	72	73	76	77
62	62	63	66	67	70	71	74	75	78	79
80	80	81	84	85	88	89	92	93	96	97
82	82	83	86	87	90	91	94	95	98	99

(7)

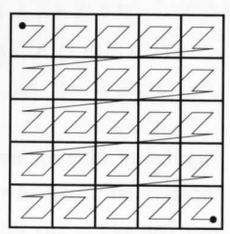


図 2　7 通りの解(左)と 0 から 99 までの経路(右)

す．この8項を$a(x)$と$b(x)$の2つのグループに分けて，それぞれが条件を満たしているかチェックします．たとえば，

$$\begin{aligned} a(x) &= (1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8) \\ &\quad \times(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}) \\ &\quad \times(1-x^5+x^{10}-x^{15}+x^{20}) \\ &\quad \times(1-x^{10}+x^{20}-x^{30}+x^{40}) \\ &= 1+x^{10}+x^{20}+x^{30}+x^{40} \\ &\quad +x^{50}+x^{60}+x^{70}+x^{80}+x^{90} \\ b(x) &= (1+x)(1+x+x^2+x^3+x^4) \\ &\quad \times(1-x+x^2-x^3+x^4) \\ &= 1+x+x^2+x^3+x^4 \\ &\quad +x^5+x^6+x^7+x^8+x^9 \end{aligned}$$

より，

$$A = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$$
$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

が得られます．計算量が多いですが，工夫すれば7通りの解が求まります．詳しくは[1]，[2]を参照してください．

東京都・西山輝夫さんから，同類の問題が過去のエレガントで出題されたことがあると教えていただきました[3]．このときの出題は，$6\times6=36$マス計算で和が2から37になる組合せを求める問題で，母関数による解答が掲載されています(講評：竹内啓)．

横浜市・土屋芳浩さんから一般の$n\times n=n^2$マス計算について，OEISのA273013に計算例があることを教えていただきました[4]．

> Number of different arrangements of nonnegative integers on a pair of n-sided dice such that the dice can add to any integer from 0 to n^2-1.
> 1, 1, 1, 3, 1, 7, 1, 10, 3, 7, 1, 42, 1, 7, 7, 35, 1, 42, 1, 42, 7, 7, 1, 230, 3, 7, 10, 42, 1, 115, 1, 126, 7, 7, 7, 393, 1, 7, 7, 230, 1, 115, 1, 42, 42, 7, 1, 1190, 3, 42, 7, 42, 1, 230, 7, 230, 7, 7, 1, 1158, 1, 7, 42, 462, 7, 115, 1, 42, 7, 115, 1, 3030

ここで注目すべきは$n=8$の場合，ブロックに分割すると解が7通り求まりますが，実際は10通りの解が存在します．ブロックに分割するだけでなく，ブロックの入れ子構造も考える必要があるということです．

参考文献

[1] 宮永望・西山豊「ジッヘルマン・ダイスの百ます計算への拡張」『大阪経大論集』Vol. 66, No. 4, 313-331, Nov 2015.
[2] Y. Nishiyama, N. Miyanaga, *Extending Sicherman Dice to 100-cell Calculation Tables*, arXiv: 1602.03736, 2 Feb 2016.
[3] 一松信，米田信夫共編『数学の問題：エレガントな解答をもとむ，第2集』日本評論社，1978年，20-21.
[4] Elliott Line, A273013, On-line Encyclopedia of Integer Series (OEIS), 13 May 2016.

［にしやま ゆたか／大阪経済大学情報社会学部］

よこがお

野家啓一●のえ・けいいち
1949年，仙台市生まれ．東北大学名誉教授・総長特命教授．専門は哲学・科学基礎論．近著に『はざまの哲学』(青土社)がある．
今回の特集執筆に当たって考えてみたが，数学以外にも「間違い」や「失敗」が新発見や新発明に結びつくことは数多くある．平行線公理の証明にも似た，永久運動機関の数々の失敗が「熱力学第二法則」の発見に導いたこと，海王星に続く幻の惑星「ヴァルカン」発見の間違いがアインシュタインの一般相対論の提唱につながったこと，などである．機会があれば，これらについても調べて書いてみたい．

難波 誠●なんば・まこと
1943年，山形県生まれ．大阪大学名誉教授．専門は複素多様体の幾何学．
碁を打つのが唯一の趣味ですが，この趣味は，ふたつの意味で健康に悪いです．ひとつは，座りっぱなしで体を動かさないこと．もうひとつは，戦闘場面になると興奮して頭に血が上り，暴走して負け，さらに血が上がることです．健康に良い趣味を探しています．

中根美知代●なかね・みちよ
1958年，千葉市生まれ．立教大学・成城大学等非常勤講師．専門は，科学史・科学基礎論．著書に『ε-δ論法とその形成』(共立出版)がある．
19世紀から20世紀の数理科学の歴史を研究しています．また，実証的な数学史こそ数学への理解を深めるという立ち位置での著作・授業を試みていて，今回の記事はその一例です．趣味は日本舞踊で，『算法少女』の舞踊化を構想していますが，作詞の進み具合は研究以上に遅いです．

河内明夫●かわうち・あきお
1948年，福島県相馬市生まれ．大阪市立大学名誉教授．専門は結び目理論．近著に『結び目の理論』(共立出版)がある．
www.sci.osaka-cu.ac.jp/~kawauchi/
現在，週2回ヨガのスクールに通っています．身体の隅々にまでリンパ液を巡らせるのは，数学研究の意欲を向上させる，と感じています．今回の特集では，数学研究上の間違いは，いずれ正されるのだから，恐れる必要はないと感じました．

池上大祐●いけがみ・だいすけ
1981年生まれ．芝浦工業大学SIT総合研究所准教授．専門は集合論．
最近のキーワードは「ベル・エポック」です．6月に引っ越したマンションの名前が「ベル・エポック」．今回の記事で扱ったルベーグが活躍した時期が「ベル・エポック(Belle Époque)」．フランス語で「良き時代」という意味だそうです．この雑誌が店頭に並ぶときには妻との同居が始まっているのですが，最近始まった新生活を年老いて振り返ったときに，良き時代だったな，と思えることを願いながら日々を暮らしています．

渕野 昌●ふちの・さかえ
東京生まれ．神戸大学大学院システム情報学研究科教授．専門は数学，特に，数理論理学，特に，集合論．
$\varepsilon\delta$-論法が分からない，という人は少なくないようです．分数計算のできない「大学生」がいるのなら，$\varepsilon\delta$-論法が分からない「大学院生」がいたっておかしくないでしょう．$\varepsilon\delta$-論法が分からずにfrustrationsをためている人が，超準解析なら分かるかもしれない，とあらぬ希望を抱いてしまうケースもあるようです．これは少し虫が良すぎるとしても，この手法を知っていると，$\varepsilon\delta$-論法では厳密な証明を書き下すことが煩わしいような命題の多くに自然で平易な証明をつけることができます．日本での教養の数学の講義では，正しい証明が書かれておらず定理の命題も書いてある通りに理解すると間違っているような教科書を使わされることがあるので，そういう教科書の内容を正し，厳密な証明をつけて，何が「もと本」に書いてあったことなのかを確定したいときには，超準解析は強い味方です．

*　*　*

梅田 亨●うめだ・とおる
1955年，大阪府豊中市生まれ．京都大学大学院理学研究科准教授．専門は表現論・不変式論．
「よこがお」は何度目かな．前二つの連載の折にも書いたので「またオマエか」って言われそう．今回のテーマは自分の「本業」に近いもの．明快な視点の提供で存在意義を主張したい．ただ，前の『計算するたのしみ』も，土台となるノートがあったのに，書けば話が拡がり，その都度新たに考えざるを得なかった．侮れないアドレナリンが出るのである．