出題 2

◉出題者
西山 豊

トランプのカードA, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10とジョーカーの計11枚を使ったゲームをします．各カードの数字が得点となります．A（エース）は1点とします．カードをよくシャッフルして机の上に裏向けに並べます．1枚ずつめくって行きますが，ジョーカーが現れない限り，そのカードの点数が加算されます．ジョーカーが現れた瞬間，ゲームは終了し，得点は0となります．ゲームはいつでもやめることができます．得点を最大にするためにはどうすればいいでしょうか．最適な戦略とそのときの平均得点を求めてください．

解答 2

応募者は30代4名，40代4名，50代6名，60代15名，70代5名の計34名で，そのうち正解者は24名でした．考え方はカード枚数に注目する方法と，得点に注目する方法の2通りがありました．その概略はつぎのとおりです．

◉── カードを5枚または6枚ひく

カードをn枚ひいたときの期待値E_nは

$$E_n = \frac{1}{2}n(11-n)$$

となります．この式はカードを5枚または6枚をひくとき最大で15点となります．

この式を導入した人は12名いました．ただし，これは答のおおよそを知るうえでの参考値にはなるものの，最適解ではありません．この式の導入だけの解答は不正解としました．

◉── 得点が28点以上になればやめる

カードをn枚ひいたときの得点がSで，次のカード1枚をひいたときに得られる得点の期待値をeとすると，

$$e = \frac{1}{11-n}(55-2S)$$

となり，$S \leqq \frac{55}{2}$のとき$e \geqq 0$，$S > \frac{55}{2}$のとき$e < 0$，つまり，現在の得点が27点以下なら次のカードをひき，28点以上になったらやめるのが最適解です．

この式の導入を正解とし，正解者は24名いました．この方法で，期待値が

$$\frac{10709}{693}$$

であると正確に計算した人が10名いました．ほとんどの人がパソコンで計算されましたが，手計算で数え上げられた方もおられました．手計算の方には申し訳

●30代
横浜市・溝口翔太
東京都・指田晃平
つくば市・高橋弘明

●40代
東京都・武井亜起夫
さいたま市・井上昌一
福井県・小松邦嘉

●50代
秋田市・千葉隆
日野市・濱上季充
桜川市・鈴木康介
蒲郡市・黄瀬正敏
姫路市・日高好光

●60代
東近江市・平岩治司
芦屋市・ぬるぽ
松戸市・広川久晴
ひたちなか市・小林紳一
所沢市・石田透
横浜市・山田正昭
さいたま市・河村直彦
我孫子市・よっちゃん
赤穂市・政家一穂

●70代
東京都・ζ
横浜市・水谷一
東京都・渡邊芳行
横須賀市・T-山田

ありません．パソコンを使うのはエレガントな解答の趣旨ではありませんので，式の導入ができた人すべてを正解とし，期待値は求められなくてもよいとしました．この値を求めるエレガントな解答はありませんでした．

また，期待値を近似式

$$\frac{(3n+1)(n+2)}{24}$$

で求めた解答がありました．これこそエレガントな解答であり，詳細は後述します．

◉── 解答例

応募解答はどれも力作で，読みごたえがありましたが，松戸市・広川久晴氏のものがエレガントな解答でしたので，それをほぼ正確に引用して紹介します．

答　戦略はめくった札の合計が28以上になったらやめる．平均得点は

$$\frac{10709}{693} \fallingdotseq 15.4531$$

理由　めくった札を手札，めくっていない机の上の札を場札と呼ぶ．手始めに，めくる札の枚数 n を固定してみた．

n 枚のときの期待値を E_n とおくと

$$E_n = \frac{55\binom{9}{n-1}}{\binom{11}{n}} = \frac{1}{2}n(11-n)$$

なので，最大値は $n = \frac{11}{2}$ のとき．

$$E_{\frac{11}{2}} = \frac{121}{8} = 15.125$$

これは式がきれいなので記してみた．

あまりにも簡潔なので説明を加えると…，

11枚から n 枚めくる組合せは $\binom{11}{n}$ 通りです．これらすべての場合の得点の総和が分子になりますが，ジョーカーをめくると得点がゼロになるので，ジョーカーを除く10枚から n 枚めくる場合のみ考えれば十分です．これら全ケースのうちで1の札が現れる回数は残り9枚から $n-1$ 枚を選ぶ組合せの数です．他の札も同様なので，総和は

$$1\binom{9}{n-1}+2\binom{9}{n-1}+\cdots+10\binom{9}{n-1}$$
$$=(1+2+\cdots+10)\binom{9}{n-1}=55\binom{9}{n-1}$$

となります．なお，「最大値は $n=\frac{11}{2}$ のとき」とありますが，n は整数なので正確にはその前後の $n=5, 6$ で最大値をとります．

この式を東京都・ζ氏は次のように求めています．

単純に k 枚めくったときの得点を求める．k $(1 \leqq k \leqq 11)$ 枚目まで数字カードになる確率は

$$\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{11-k}{12-k}=\frac{11-k}{11},$$

k 枚目まで数字カードをめくったときの平均点は

$$\frac{1+2+\cdots+10}{10}\cdot k=\frac{55}{10}k=\frac{11}{2}k$$

となる．k 枚めくった途中でジョーカーが出ると0点になるから，k 枚目までの平均点は

$$\frac{11}{2}k\times\frac{11-k}{11}=\frac{1}{2}k(11-k)$$

と表せる．

カード枚数を横軸に，得点を縦軸にとると，グラフは図1のようになります．

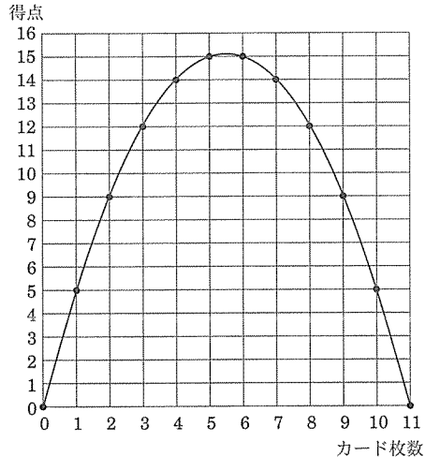

図1　カード枚数を固定したときの期待値

広川氏の解答に戻ります．

作戦で大切なことは，どこでやめるか，である．自分の手札が n 枚で合計 S のとき，次の札をめくったときの，その1枚の期待値は，ジョーカーをめくれば $-S$ なので

$$e=\frac{1}{11-n}(-S)+\frac{1}{11-n}(55-S)$$
$$=\frac{1}{11-n}(55-2S)$$

となる．

上式の第2項に説明を加えると，次の札($n+1$ 枚目)が数字の札の確率は $\frac{10-n}{11-n}$，そのとき得る点数は $\frac{55-S}{10-n}$ ですので

$$\frac{10-n}{11-n}\cdot\frac{55-S}{10-n}=\frac{1}{11-n}(55-S)$$

となります．

$11-n$ は常に正で，$55-2S$ は S について単調減少．これより $S \leqq 27$ では次の1枚をひいた方がよいし，$S \geqq 28$ では次の1枚をひかないでやめるのがよい．

よって戦略は単純に「手札の合計が28以上になったらやめる」となる．

広川氏はこのあと，「大変なのは，その期待値，私にはよい方法が分からなかったので，すべての場合を書き出して考えた」と述べられています．広川氏の計算法を以下に分かりやすく紹介します．

j 枚目で得点が i になる場合の数を a_{ij} とすると，期待値 E は

$$E=\sum_{j=4}^{7}P_j\sum_{i=28}^{37}ia_{ij}$$

となります．ここに，P_j は，11枚から j 枚を選ぶ組合せの，1つの場合の確率で，

$$P_j=\frac{1}{\binom{11}{j}}$$

です．

i の範囲は

$$28 \leqq i \leqq 37$$

であり，j の範囲は

$$8+9+10=27$$
$$1+2+3+4+5+6+7=28$$

より

$$4 \leqq j \leqq 7$$

となります．ただし，$j=4$ の場合は，3枚目までの合計が27以下で，4枚目で28以上になることから

$$7+8+9+10=34$$

より，i の最大は34となります．

a_{ij} について，例えば7枚目で29になる場合の $a_{ij}=a_{29,7}$ を求めてみましょう．

7枚目で29になるのは27+2, 26+3, 25+4, 24+5, 23+6, 22+7, 21+8の7通りが考えられます．

27+2では6枚で27になるものを表にすると次の9通りありますが，

$$1+2+3+4+7+10=27$$
$$1+2+3+5+6+10=27$$
$$1+2+3+4+8+9=27$$
$$1+2+3+5+7+9=27$$
$$1+2+4+5+6+9=27$$
$$1+2+3+6+7+8=27$$
$$1+2+4+5+7+8=27$$
$$1+3+4+5+6+8=27 \qquad (*)$$
$$2+3+4+5+6+7=27$$

そのうち場札に2が残っているのは(*)印の1通りだけです．

22+7では6枚で22になるのは1通りで，場札に7が残っていないので，この場合はありません．

$$1+2+3+4+5+7=22$$

このようにして，7枚目で29になるのは6通りになります．

$$a_{ij}=a_{29,7}=6$$

このような「面倒な」作業を「慎重に」行い，すべての場合について調べると表1(次ページ)になります．ただし，この表作成は出題の範囲外です．

表1　a_{ij} と P_j

		4枚目	5枚目	6枚目	7枚目
場合の数 a_{ij}	28	9	100	60	7
	29	6	87	67	6
	30	5	76	63	10
	31	3	63	63	12
	32	2	51	55	13
	33	1	36	54	14
	34	1	26	41	14
	35	0	17	33	13
	36	0	9	21	11
	37	0	3	11	7
1つの場合の確率 P_j		$\frac{1}{\binom{11}{4}}$	$\frac{1}{\binom{11}{5}}$	$\frac{1}{\binom{11}{6}}$	$\frac{1}{\binom{11}{7}}$

これより

$$E=\sum_{j=4}^{7}P_j\sum_{i=28}^{37}ia_{ij}$$
$$=\frac{80}{3\cdot11}+\frac{1429}{3\cdot7\cdot11}+\frac{3680}{9\cdot7\cdot11}+\frac{118}{7\cdot11}$$
$$=\frac{10709}{9\cdot7\cdot11}=\frac{10709}{693}$$

となり，

$$E=\frac{10709}{693}\fallingdotseq15.4531$$

が最適な戦略の期待値です．

カード枚数に注目したときの期待値は15でしたので，得点に注目したときの方がたしかに大きくなっています．

秋田県・千葉隆氏は，「ともかく5枚めくる」戦略からのずれに注目することでうまく期待値を計算しておられました．

◉── 最適解の近似式

横浜市・山田正昭氏は，最適解の近似式を考察されています．エレガントな解答なので紹介します．

ジョーカーを除くカードの枚数を n，カードの数字の合計を N とします．

大まかに考えてみます．平均的には，カードの半分をめくることになるので，ジョーカーが出る確率は概ね1/2．ジョーカーが出ない場合は，得点が概ね $N/2$ のときにゲームをやめます．したがって，平均得点は概ね $N/4$ になります．$N=55$ の場合にあてはめると，13.75です．しかし，これは厳密値15.4531…とはかなり差があります．この差は，どこから来るのでしょうか．

ゲームをやめるのは「得点が $N/2$ を超えたとき」なので，ゲームをやめたときの得点は $N/2$ よりも大きいからです．この余剰分を計算してみます．

$N/2$ を超えたとき最後にめくったカードが1のときは，余剰分は0.5．2のときは，0.5または1.5で平均1.0．…．n のときは，0.5から $n-0.5$ で平均 $n/2$ となります(説明図がありますが省略します)．

また，$N/2$ を超えたとき最後にめくったカードが1である確率は $1/N$．2である確率は $2/N$．…．n である確率は n/N です．したがって余剰分は

$$0.5\cdot\frac{1}{N}+1.0\cdot\frac{2}{N}+\cdots+\frac{n}{2}\cdot\frac{10}{N}$$
$$=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2N}$$

となり，$N=n(n+1)/2$ であることを考慮すると，

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2N}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)}=\frac{2n+1}{6}$$

となります．

余剰分が生じるのはジョーカーが出なかったときだけなので，期待値は半分になります．先に計算した概算値 $N/4$ に加算すると，

$$\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{6}=\frac{n(n+1)}{8}+\frac{2n+1}{12}$$
$$=\frac{3n^2+7n+2}{24}=\frac{(3n+1)(n+2)}{24}$$

となります．$n=10$ とすると，$\frac{31}{2}=15.5$ で，厳密値15.4531…にかなり近づきました．各 n について，近似値と厳密値の比較を示します(後略)．

◉── 出題の意図

2021年7月，オランダのHenk Tijmsさんという方からメールが届き，氏の新著の知らせとともに数学問題が添付されていました．私は確率計算が苦手なので，パソコンによるシミュレーションで期待値を推定しました．カード枚数を固定したときの期待値が整数で求まることに意外性を感じ，得点に注目する方法に進みましたが，手作業では難しくパソコンに頼ってしまいました．

パソコンではなくエレガントな解答がないかと思い今回の出題となりました．$\frac{10709}{693}$ を計算するエレガントな解答はなかったものの，期待値の近似式を導入するなど，やはり数学の力を感じました．

このゲームはジョーカー・ブラックジャックと呼ばれているもので，参考まで出典を記します[1]．

参考資料

[1] David Ding, Joker Blackjack, Riddler Classic, June 25, 2021
https://www.davidyding.com/navPages/riddlers/riddlerC06252021
(URLの最終閲覧は2022年1月5日)

[にしやま ゆたか／大阪経済大学名誉教授]

新刊案内
Response 微分積分＆線型代数
大学数学基礎理論の盲点を衝く
中村英樹 著　A5判・200頁／定価2,420円(税込)

ローレンツ-ミンコフスキーの幾何学 ❶
— 1+1 次元の世界 —
ミンコフスキー平面の幾何
相対性理論から生まれた幾何学
平面幾何からミンコフスキー幾何への誘い
井ノ口順一 著　A5判・189頁／定価2,310円(税込)

初学者のための群論
本書は2007年に刊行された『群論への招待』を，書名と判型を変更したものです．具体的イメージを持ちながら，いろいろな定義を理解していただくことを目的に書かれた名著の復刻版です．
永田雅宜 著　A5判・136頁／定価1,760円(税込)

復刻版 大学院への解析学演習
梶原壌二 著　A5判・212頁／定価3,080円(税込)

学生諸賢・研究者、数学に挑戦する人のための月刊雑誌(毎月12日発売)
現代数学

◇定価1,097円(税込)
3月号の案内
・数列のめがね／数列と点列
・オイラー積原理／拡張オイラー積
・数学の未来史／創造性の神秘
・輝数遇数 —数学教室訪問／坂内健一

現代数学社
〒606-8425　京都市左京区鹿ヶ谷西寺ノ前町1
TEL075(751)0727　FAX075(744)0906
https://www.gensu.co.jp/