

スーパー・スピロ・マジック

西山 豊

1. 魔法の模様

私がこのエッセイを書くことに至った理由は次による。私の娘が生れてまだ一歳にも満たないというのに、母がかわいい孫にと“高級なおもちゃ”を買ってきてくれたことから始まる。

このおもちゃはスピロ・マジックという模様を画くおもちゃである。円盤の上に10センチ平方の紙を綴じ、紙に垂直にサインペンを立てる。円盤が回転するにつれ、あれよあれよという間にそれはもう美しい模様ができあがることになる。私は、最初は何げなくおもちゃを作動していたが、この簡単なおもちゃが次々に描き出す魔法の模様のとりこになってしまい、娘にももらったはずのものがついには私の所有物になってしまった。

スピロとは「螺旋形・螺旋状 (spiral)」の意味の連結語である。しかしスピロ・マジックは普通の螺旋とはその美しさにおいて格段の差がある。そこにマジックと称する所以があるのだが。

私の興味は単に模様を画くには満足できなかった。何か数学的な証明が与えられはしないだろうかかと頭をひねらせたものである。おもちゃの動きから数式を組み立ててみた。その後暇をみつけてはこの数式の実証がたくて計算機にかけてみた。結果は全て良好だった。ここにその全過程をご披露しよう。

[模様の実例]

スピロ・マジックを使つての“私の秀作”

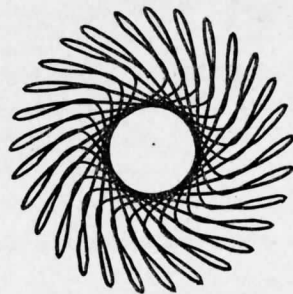


図 1

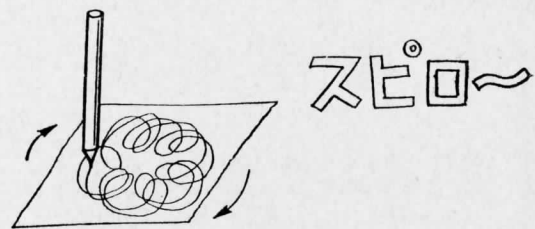


図 2

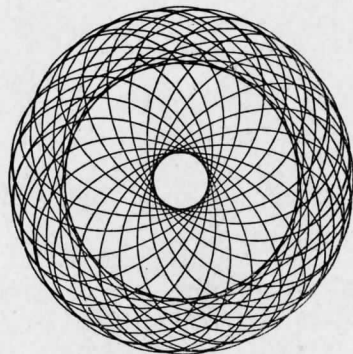


図 3

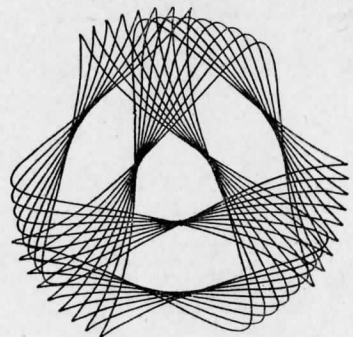


図 4

2. スピロ・マジックの仕掛け

まずは、このおもちゃの解明から手がけよう。図5を参照しながら説明する。次の①から⑤の作動を順次おこなえばよい。

- ① 用紙を大円盤 (D) のクリップに平らになるようにしっかりとさむ。
- ② ペンホルダー (E) にサインペンをさしこむ。
- ③ バー (F) を小円盤 (A) とバーホルダー (I) の上にセットする。
- ④ この時バーの先端のつまみ (J) が小円盤に対して垂直になるようにする。
- ⑤ ハンドル (G) を回転する。電動式の場合は電動スイッチ (H) を ON にする。

各部品の補足説明をしておこう。

小円盤、大円盤はともに平面回転をする。小円盤の回転はハンドルの回転で与えられるが、大円盤の回転は目盛 (B) を介して小円盤から伝達される。目盛は小円盤に対する大円盤の回転方向および回転速度比 (角速度比) を決定する。

バーホルダーは目盛 (C) に沿って、ペンホルダーはバー (F) に沿って各々移動できる。つまみも小円盤の各穴に移動できる。移動できるということはすなわち、それだけたくさんの模様が画けることを意味している。このことは後の数式による表現からも明らかにされるであろう。

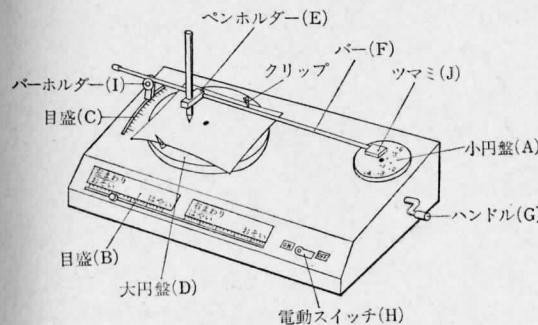


図 5 スピロ・マジックの本体

さて、私の画いた模様にも何度か繰返すうちにある特徴らしきものを得た。それを列記しておこう。

- ・つまみ (J) を小円盤 (A) 上の中心にさしこめば円模様になる。
- ・つまみ (J) が中心から外に向うほど大きな模様を画く。
- ・目盛 (B) が右まわりにあるときは外に向った模様を画き、左まわりにあるときは中心に向った模様を画く。
- ・目盛 (B) の速さを少し変えるだけで模様は絶えず変

化する。速さが大きくなればなるほどひねり模様になる。

- ・目盛 (B) が適当な値をさしていないと模様は閉じたものにならずいつまでも画いてきたなくなる。
- ・目盛 (C) が大きくなるほど大きな模様を画く。図5ではバーホルダー (I) を手前に引けば小さく、奥にやれば大きくなる。

3. 数学的把握

図5に示したスピロ・マジックで数式にとり扱う部分のみを座標表示すれば図6になる。ペンの位置は R 点である。

小円盤 (A) は $S_0(x_0, y_0)$ を中心に ω_0 の角速度で回転している。

大円盤 (D) は $S_1(x_1, y_1)$ を中心に ω_1 の角速度で回転している。

バー (F) はつまみ (J) とバーホルダー (I) に支えられているから、 $P(x_p, y_p)$ と $C(0, c)$ を結ぶ直線として表わせる。注意を要するのは、P は固定端であるが C は自由端である。

ペンの位置 $R(x_r, y_r)$ までは、小円盤の中心 S_0 から半径 r_0 隔てた $P(x_p, y_p)$ からペンホルダー $Q(x_q, y_q)$ へ l だけ進み、直線 PQ から直角に d だけ下ることによって求まる。

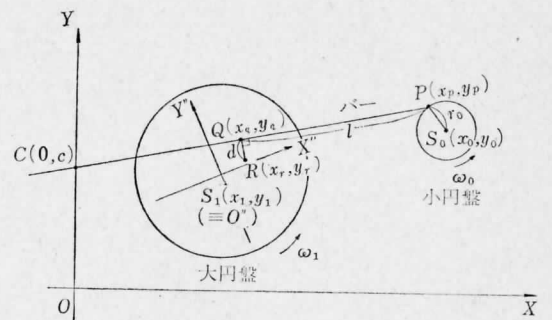


図 6 スピロ・マジックの座標表現

以上の設定のもとに数式をあてはめてペンの軌跡 R を解いてみよう。問題は次の2つに分けて解くほうがわかりやすい。すなわち、

- ・座標系 OXY から見て、P 点を出発に Q 点を経て R 点を求める。
 - ・上で求めた R 点を座標系 $O''X''Y''$ から見た場合どう動くかをみる。
- である。

[第1段階] P 点→Q 点→R 点。

P 点 (x_p, y_p) 。

これは $S_0(x_0, y_0)$ を中心に半径 r_0 の円運動をして

いるから、

$$(x_p - x_0)^2 + (y_p - y_0)^2 = r_0^2 \quad (1)$$

また、 t を時間にとれば次のようにも表せる。

$$\begin{cases} x_p = x_0 + r_0 \cos \omega_0 t \\ y_p = y_0 + r_0 \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (2)$$

Q 点 (x_q, y_q) .

P 点を中心とする半径 l の円と、直線 PC のなす交点のうち的一点として求まる。すなわち連立方程式

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = l^2 \quad (4)$$

$$y - y_p = \frac{y_p - c}{x_p - 0}(x - x_p) \quad (5)$$

を解けばよい。答が (x_q, y_q) になるから、

$$x_q = x_p - \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_p - c}{x_p}\right)^2}} \quad (6)$$

$$y_q = \begin{cases} y_p + \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_p}{y_p - c}\right)^2}} & (y_p \leq c \text{ のとき}) \\ y_p - \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_p}{y_p - c}\right)^2}} & (y_p > c \text{ のとき}) \end{cases} \quad (7)$$

R 点 (x_r, y_r) .

Q 点を中心とする半径 d の円と、直線 QR のなす交点のうち的一点として求まる。すなわち連立方程式

$$\begin{cases} (x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 = d^2 \\ y - y_q = -\frac{x_p - 0}{y_p - c}(x - x_q) \end{cases} \quad (8)$$

を解けばよい。答が (x_r, y_r) になるから、

$$x_r = \begin{cases} x_q - \frac{d}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_p}{y_p - c}\right)^2}} & (y_p \leq c \text{ のとき}) \\ x_q + \frac{d}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_p}{y_p - c}\right)^2}} & (y_p > c \text{ のとき}) \end{cases} \quad (10)$$

$$y_r = y_q - \frac{d}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_p - c}{x_p}\right)^2}} \quad (11)$$

これで R 点まで求まったことになる。ここで注意しておきたいことは、P 点は円運動を、Q 点、R 点は楕円運動をする。厳密な証明は避ける。

【第 2 段階】座標系 OXY から座標系 $O''X''Y''$ へ。R 点の運動を座標系 $O''X''Y''$ から見るわけだが、いきなり求めなくて中間座標系 $O'X'Y'$ を考える。すなわち、座標系 OXY から座標系 $O'X'Y'$ への平行移動(図

7) と、座標系 $O'X'Y'$ から座標系 $O''X''Y''$ への回転移動(図 8) の組合せをとる。

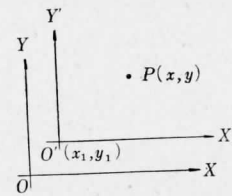


図 7 平行移動

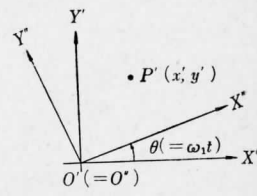


図 8 回転移動

いま、図 7 で OXY の点 $P(x, y)$ が $O'X'Y'$ では $P'(x', y')$ になるとすれば

$$\begin{cases} x = x_1 + x' \\ y = y_1 + y' \end{cases} \quad (12)$$

次に、図 8 で $O'X'Y'$ の点 $P'(x', y')$ が $O''X''Y''$ では $P''(x'', y'')$ になるとすれば

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta \end{cases} \quad (14)$$

となる。平行移動 (12), (13) と回転移動 (14), (15) を合せると、

$$\begin{cases} x = x_1 + x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y = y_1 + x'' \sin \theta + y'' \cos \theta \end{cases} \quad (16)$$

行列表示をすれば、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad (18)$$

となる。話をもとに戻してみる。座標系 OXY から見た R 点 (x_r, y_r) が座標系 $O''X''Y''$ から見れば S 点 (x_s, y_s) として見えるなら、この 2 点の関係は、

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \quad (19)$$

となる。(19) 式を S 点 (x_s, y_s) について解くならば、

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r - x_1 \\ y_r - y_1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

となる。これでペンの軌跡 $S(x_s, y_s)$ は完全に表現できたわけであるが、いま、この軌跡を表わす関数を F とするならば、

$$F(x_0, y_0, \omega_0, x_1, y_1, \omega_1, r_0, l, d, c) = 0$$

となる。10 個の変数によって F が決まる。いいかえればそれだけたくさんの自由度をもった模様が画けることの証しともなっている。

補足 1. 回転 (Rotation) の公式の証明

(14), (15) で用いた回転の公式は図 9 から容易に証明できる。

$$\begin{aligned} x &= \overline{OD} - \overline{CD} \\ &= \overline{OB} \cos \theta - \overline{PB} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= \overline{CH} + \overline{PH} \\ &= \overline{OB} \sin \theta + \overline{PB} \cos \theta \\ &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

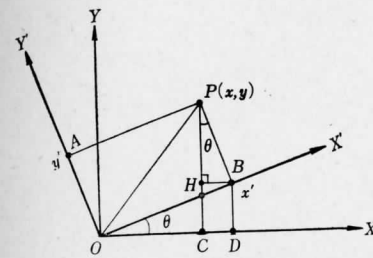


図 9

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad [\text{証明終}]$$

補足 2. 小円盤と大円盤の角速度比は整数比でなければならぬ。

小円盤と大円盤の角速度比を

$$\omega_0 : \omega_1 = n : m \quad (n, m \text{ は整数}) \quad (21)$$

で与える。それぞれの周期は、

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (22)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (23)$$

となり、合成された周期は T_0, T_1 の最小公倍数であるから

$$\begin{aligned} T &= n \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = nT_0 \\ &= m \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = mT_1 \end{aligned} \quad (23)$$

となる。角速度比が整数比であることがくずれると周期 T は無限大に近づく。模様が閉じずにいつまでも書きつづけるのは以上の理由によるわけである。後のコンピュータによる実証でも示すが、ここに与えた n は模様では頂点の数を意味している。

スピロ・マジックは小円盤と大円盤の 2 振動体の合成として表わされることを示してきたが、模様が美しい理由は“2 振動体の合成”にもありそうだ。この種の同類項としては、有名なリサージュ曲線 (Lissajous' figure) があげられる。(図 10) この曲線は、

$$x = D_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01})$$

$$y = D_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

で与えられる。この場合も ω_1 と ω_2 は整数比でなければならぬ。

$\omega_1 : \omega_2$

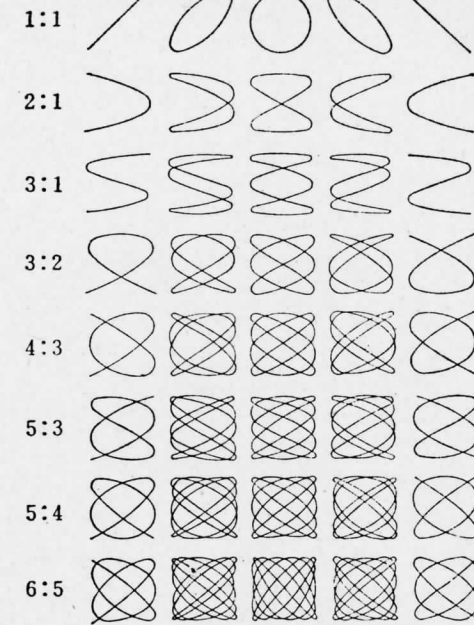


図 10 リサージュ曲線

4. コンピュータによる実証

次に示すのは模様をプロッターに画かせるためのフォートラン (FORTRAN) 言語によるプログラム (図 11) とプロッター図 (図 12, 13) である。このプログラムでは小円盤と大円盤の角速度比のみに着目し、その他のデータは固定のものとして計算した。小円盤と大円盤の角速度比を N 対 M とし、回転方向が同一の場合は符号をプラスに、異なる場合はマイナスにして、各々 5 ケースのデータを与えた。(表 1)

表 1 テスト・データ

| ケース | 小円盤 (N) | 大円盤 (M) | | 角速度比 $N/ M $ |
|-----|-------------|-------------|-------|--------------|
| | | 同一方向 | 異なる方向 | |
| (1) | 15 | 11 | -11 | 1.36 |
| (2) | 13 | 5 | -5 | 2.6 |
| (3) | 16 | 5 | -5 | 3.2 |
| (4) | 15 | 4 | -4 | 3.75 |
| (5) | 13 | 3 | -3 | 4.33 |
| 備考 | | 図12 | 図13 | |

図 12, 図 13 からわかるように M がプラスの場合は外向きの図となり、マイナスの場合は内向きの図となる。 N は頂点の数になっている。

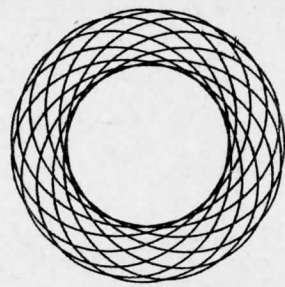
角速度比がさらに大きくなればどうなるだろうか。そ

```

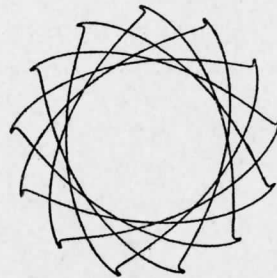
C
C
C SUPER SPIRO MAGIC PLOTTING ROUTINE
0001 R0=20.
0002 R1=150.
0003 D=10.
0004 X0=250.
0005 Y0=50.
0006 X1=100.
0007 Y1=70.
0008 J=5
0009 C=50.+30.*(J-1)
0010 CALL PLOTS(X,X)
0011 CALL FACTOR(0.5)
0012 CALL PLOT(150.,150.,-3)
0013 ICOUNT=0
0014
2000 CONTINUE
0015 READ(5,200,END=3000) N,M
0016 200 FORMAT(2I5)
0017 ICOUNT=ICOUNT+1
0018 WRITE(6,201) N,M
0019 201 FORMAT(1H,'N=',15,2X,'M=',15)
0020 W0=N*0.01
0021 W1=M*0.01
0022 IEND=N*2*3.1416/W0
0023 DO 1000 I=1,IEND
C
C
C (XP,YP)
0024
0025 W0T=W0*(I-1)
0026 XP=X0+R0*COS(W0T)
0027 YP=Y0+R0*SIN(W0T)
C
C
C (XQ,YQ)
0027 IF(XP.EQ.0.0) GOTO 7
0028 XQ=XP-R1/SQRT(1.+(YP-C)/XP)**2)
0029 GOTO 8
0030 7 XQ=XP
0031 8 CONTINUE
0032 IF(YP-C) 10,15,20
0033 10 YQ=YP+R1/SQRT(1.+(XP/(YP-C))**2)
0034 GOTO 30
0035 15 YQ=YP
0036 GOTO 30
0037 20 YQ=YP-R1/SQRT(1.+(XP/(YP-C))**2)
0038 30 CONTINUE
C
C
C (XR,YR)
0039 IF(YP-C) 40,45,50
0040 40 XR=XQ-D/SQRT(1.+(XP/(YP-C))**2)
0041 GOTO 60
0042 45 XR=XQ
0043 GOTO 60
0044 50 XR=XQ+D/SQRT(1.+(XP/(YP-C))**2)
0045 60 CONTINUE
0046 IF(XP.EQ.0.0) GOTO 65
0047 YR=YQ-D/SQRT(1.+(YP-C)/XP)**2)
0048 GOTO 70
0049 65 YR=YQ
0050 70 CONTINUE
C
C
C (XS,YS)
0051
0052 W1T=W1*(I-1)
0053 XS=COS(W1T)*(XR-X1)+SIN(W1T)*(YR-Y1)
0054 YS=-SIN(W1T)*(XR-X1)+COS(W1T)*(YR-Y1)
C
0054 IF(I.EQ.1) CALL PLOT(XS,YS,3)
0055 CALL PLOT(XS,YS,2)
1000 CONTINUE
0056 CALL PLOT(150.,150.,-3)
0057 GOTO 2000
0058
3000 CONTINUE
0059 XX=-150.*(ICOUNT+1)
0060 CALL PLOT(XX,-150.,999)
0061 STOP
0062 END
0063

```

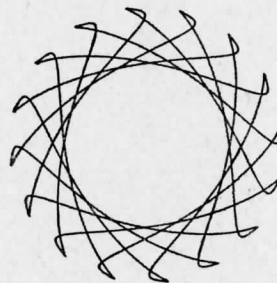
図 11 プロッターに画かせるためのプログラム



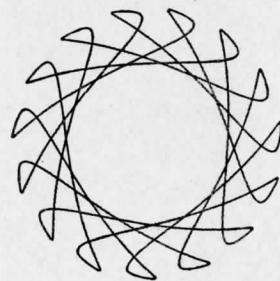
(1)



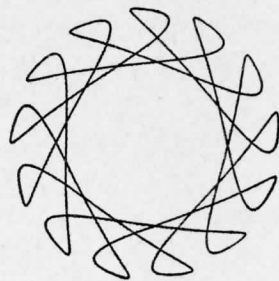
(2)



(3)

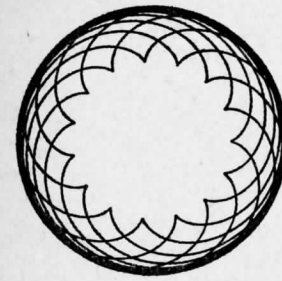


(4)

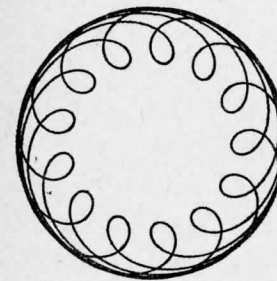


(5)

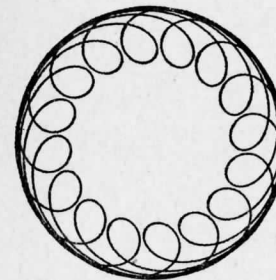
図 12 同一方向の例



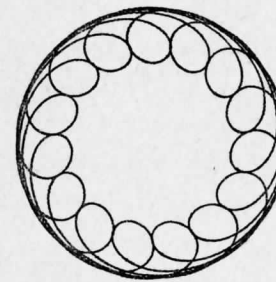
(1)



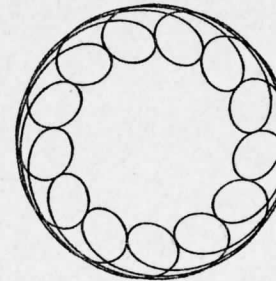
(2)



(3)



(4)



(5)

図 13 異なる方向の例

れには次の実験をやれば明らかとなる。これらの模様もあるパターンを N 回繰返すことによって画かれるから、そのパターンのみをプロットさせればよい。(図 14, 15) 角速度比 ($N/|M|$) が大きくなるとは、小円盤の回転 (N) に対する大円盤の回転 (M) が小さく (遅く) なることであるから、ますますその“ひねり度”を減じた模様となる。逆に角速度比が小さくなればなるほど“ひねり度”を増した模様となる。

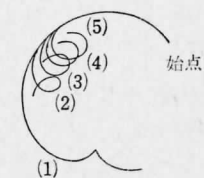
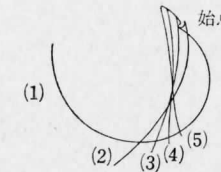


図 14 同一方向のパターン 図 15 異なる方向のパターン

私は最近コンピュータ・アートと称するある模様を見た。よく見ればスピロ・マジックに似ている。私は考えた。確かにコンピュータによる作図は正確だ。一分の隙も与えない。しかし正確さ以外は何もない。コンピュータ・アートのコンピュータとは模様それ自体がコンピュータではなく、正確さにおいてのみコンピュータなのかと。こんなに素晴らしい模様がこんなに簡単なおもちゃで画けるのだから！

(にしやま ゆたか/日本アイ・ビー・エム)

数学基礎論 の世界

ロジックの雑記帳から

竹内外史著

1500 円

本書のどこを開いても生きた数学の世界が現われてくる。専門的な予備知識はほとんどいらぬ。にもかかわらず、そこに盛られた内容は深く広い。…(白井古希男氏評より)

●内容

初等初等整数論/有限の立場について/ウイント大きな自然数/ニセモノ自然数/自然数論におけるある決定問題/ゲーデルの新しい公理について/体の理論とロジック

日本評論社