

# 絵画と数学の接点

西山 豊

## 1. ビルが反っている

「おい、あのビル歪んでいるんじゃないかい」  
 昼食のあとビル街をのらりくらりと散歩しながらふと友達に話しかけてみた。

「いや、まっすぐに見えるよ。お前も面白いことを言うもんだな」

彼は考えてみようとしめない。  
 「前の方にグーンと反りかえっているように見えるんだがなあ」

「古いビルならともかくだよ、新築されたばかり、それも近代建築の粋を集めた建造物なんだよ。反ったり曲ったりしているわけがないじゃないか。……よくあるじゃない。高い塔や建物なんかを見たとき、それがいまにも倒れそうだという不安感を持つことが。心理的なものなんだよ、きっと」

「違うんだなあ。もっとよく見ろよ。右端の方だよ。グーンと前の方に弓形に反ってみえるじゃないか」

ビルが反っている反っていないの詰らぬ会話の一コマである。

真すぐに建っているはずのビルが反ってみえるのだ。一本一本の筋をとりだして凝視すれば反ってはいない。しかしビルの面から受ける印象は明らかに反っているのだ。反って見えるビルもあるし、真すぐに見えるビルもある。このことがどうも頭にひっかかってならなかった。自分は乱視かと疑ってもみた。とにかく私はこのことをメモしておいた。

最近、ビルの反りについてその真偽を究明してみる気になった。というのは、マンガを読んでいると反ったビルのスケッチがあったからである。(図1)「おや、こんなところに自分と同じことを感じる者がいたのか」と何だか同胞を見つけたように、私の心は浮かれ好奇心と探究心に強く駆られたのである。

あとで明らかにするが、このスケッチはマンガ家の

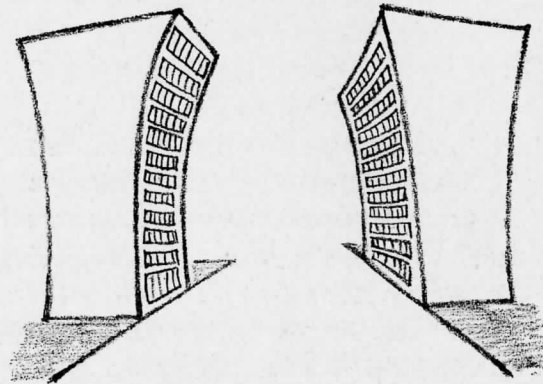


図1 ビル街のスケッチ

分や思いつきでのスケッチではない。マンガ家自身もまさにそう感じていたのである。

ビルは反って見えるのだ!

曲線は見る角度によっては直線に見えることもある。もちろん空間においてであるが、しかるに「逆必ずしも真ならず」で、直線はどの角度からどう見ようとも曲線には見えない。ところがその逆がなぜ真となり得るのかの推理を楽しんでみたい。

## 2. 透視図法

風景や人物をキャンパス上にいかに立体的に表現し、量感・深みといったものをどれだけ出し得るかは、絵を志す者のぶつかる悩みの一つであろう。その有力な手法の一つに透視図法がある。

キャンパスは上下、左右に拡がりを持ち、前後には拡がりがない。(平面)しかし、どんなにキャンパスが大きくても一定の大きさに限定されてしまう。(有限な平面)ところが、奥行き方向は現実にはその拡がりゼロであっても「適切な表現」がなされれば、その深さは無限となり得る。この「適切な表現」がまさに透視図法

である。遠近法ともよばれている。

15世紀から16世紀にかけてのルネサンスの時期、レオナルド・ダ・ヴィンチをはじめとする多くの画家たちは透視図法を研究し、それに基づいて数多くのすぐれた作品を残している。有名な「最後の晩餐」はキリストの右眼のあたりに視心(注視する点)をおく一点透視でまとめられている。中世以前の絵画では「何を描くのか」という意識はあっても、「どの位置からどの方向を見たところを描くのか」という意識はなかった。したがってルネサンスは絵画においても一つの転期の時代であったともいえよう。ドイツの画家デューラーは当時の画家が透視図法を研究しているところを版画にあらわしている。(図2)いかに苦勞して絵を画いていたかが窺われる。

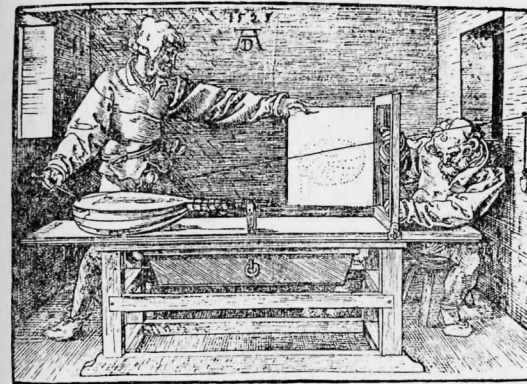


図2 デューラーの版画/透視図法の研究

この図法は、ユークリッド幾何学とは違った新しい幾何学、すなわち平行線公理を否定した射影幾何学を生み出す基盤となったほど理論的にも明快な幾何学的方法である。ここに絵画と数学の意外にも密接な関係に驚かされるのである。

透視図法は、像を写すという意味で名実ともに一種の写像である。いま、

$$\begin{array}{ccc} \text{風景} & \xrightarrow{f} & \text{キャンパス} \\ (\text{立体}) & & (\text{平面}) \\ & \xleftarrow{f^{-1}} & \end{array}$$

なる関数 $f$ を考える。関数 $f$ は画家が風景をキャンパス上に描くことであり、その逆関数 $f^{-1}$ は描かれた絵画から元の空間を再構成しながら鑑賞することに対応している。そしてこの関数 $f$ が透視図法に他ならない。

## 3. 消失点

さて、透視図法の基礎ともいべき消失点について簡

単な説明をしよう。比較的大きい箱に、やや眼を近づけるようにして見る。よく見ればこの立方体の3つの面は、厳密には菱形でも平行四辺形でもない。相對する辺は平行ではない。この線を延長すれば交わることになる。その交点を消失点と呼んでいる。(図3)

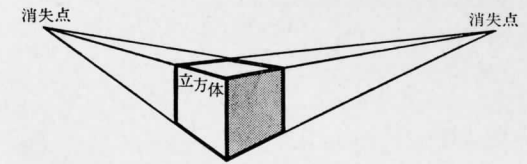


図3 消失点

つまり、平行な線は無限遠点ではここで消失するように交わるというのである。それではこの消失点の位置は一体どこになるのかといった問題は図4が明らかにしてくれる。地平面に画面を垂直に立てる。地平面上には平行な二直線 $A_0A_1A_\infty$ 、 $B_0B_1B_\infty$ がある。ところが我々がこの二直線を見るということは、目の位置である視点 $E$ から、注視する位置である視心 $V_e$ を含む画面に写された二直線の像を見るということになる。つまり、 $A_0A_1A_\infty$ 、 $B_0B_1B_\infty$ ではなく $A_0A_1V_e$ 、 $B_0B_1V_e$ を二直線として見ていることになる。平行な直線が視心 $V_e$ で交わっていることになる。ここに、視点 $E$ から視心 $V_e$ に向かう方向は二直線 $A_0A_1A_\infty$ 、 $B_0B_1B_\infty$ におのおの平行である。図3における消失点の位置は立方体の各面に平行な方向に視点 $E \rightarrow$ 視心 $V_e$ を設ければ容易に求まる。

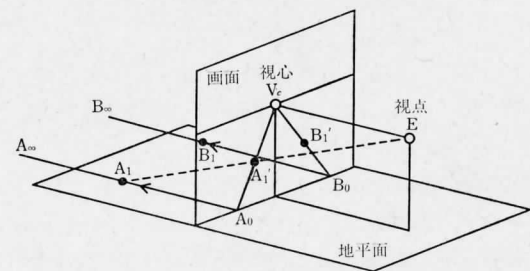


図4 平行な直線は視心で交わる

消失点の数により、立方体は3つの透視図法が考えられる。(図5)

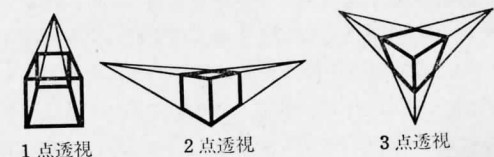


図5 3つの透視図法

この理由は次の通りである。立方体を構成する辺の数は12本ある。この12本はおのおの4本ずつの3組の平行な辺群に分けられる。(図6) O, Δ, × どちらともは互に平行である。

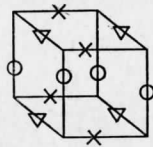


図6 平行な辺群

いま、視点Eから視心V<sub>0</sub>に向かう方向を視線の方向と呼ぼう。視線の方向に直交する辺群は消失点を持たない。逆に、視線の方向に直交しない辺群は必ず消失点を持つ。その辺群の数が1つの場合は1点透視、2つの場合は2点透視、3つの場合は3点透視となる。これ以上はない。例えば4点透視など。

#### 4. 幾何学的錯視

話をもとに戻そう。ピルの反りについてであった。ピルを透視図法を用いて描いてみよう。(図7) ピルは横縞(縞なんてあるのか?)のピルとし、3点透視を用いなかったのはそれなりの理由がある。この図をよく見ていただきたい。直線が曲っては見えなだろうか。すなわち、図1のようにピルが反っているように見えはしないだろうか。

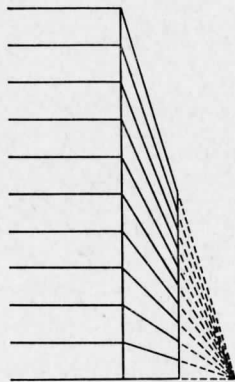


図7 ピルの1点透視図

では、なぜ反って見えるのかをさらに深めてみよう。我々が物を見るとき、対象物の幾何学的特性と、我々の知覚とは必ずしも一致しない。錯視図形はそのズレを顕著に示すものである。数多くある中でヴァント錯視(図8)とヘリング錯視(図9)を示す。2本の平行な直線は真中あたりで狭まって見えたり、ふくらんで見えたりする。

ピルの透視図はこれらの錯視図に類することになる。

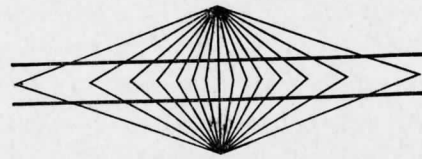


図8 ヴァント錯視

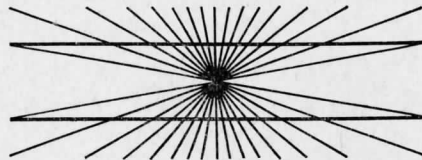


図9 ヘリング錯視

なぜこのようなズレが生じるのであろうか。心理学の分野では知覚判断という項で議論されている。たくさんの錯視図形が考案されているもの、明確な理由はまだまだつけられていないらしい。

ここに興味深い矛盾を示そう。盛永四郎(1969)はヘリングの矛盾という図を示している。(図10) 一連の点は平行な直線上にあるが、真中あたりはふくらんでは見えむしろ吸いこまれるように狭まって見える。ヘリング錯視(図9)では真中あたりがふくらんで見えるのは、背景にある放射状の直線のために平行線が「方向のディメンション」として知覚されるのに対して、図10では平行線は「距離のディメンション」として知覚されるからだというのである。

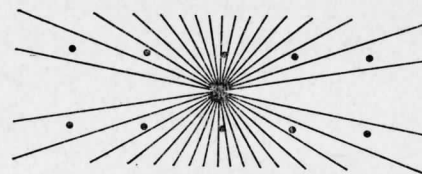


図10 ヘリング錯視の矛盾

ピルが縦縞のピルだったら決して反っては見えなのだ! とにかく人間の知覚ほど不思議なものはない。眼はよくカメラにたとえられるが必ずしも一致しない。例えば高くそびえる山を背景にとった写真ができあがってみれば山は低く足元にうずくまり、人物写真は前にでた手や足が「不自然に」大きく写ることがよくある。こんな感じではなかったと思うことがある。レンズが歪んでいたのではない、むしろレンズこそ正確に射影していた

のである。図7に示したピルも網膜上では屋上になるほど小さく結像されているはずであるが現実にはそのように知覚していない。このことを知覚の恒常性といっている。したがってピルは3点透視ではなく1点透視として描いたのである。

#### 5. 透視変換

ピルの反りについて一応の結論を得た。そこで話題を図2に戻そう。このような苦勞をせずにもっと簡単に数式なんかで表わせないものだろうか。

近年、透視図をコンピュータでかかせる試みがなされている。図11は山の地形図である。地図を縦横等間隔のメッシュに切り、その格子点での高さを与える。その立ちあがりを透視すれば山の起伏がよくわかる。写真とはまた一味違った美しさを味わえる。中世の画家にこれをやらせたらどれほどの時間と労力を費すことになるだろうか。きっと日が暮れて朝が来てしまうことだろう。これから示す透視変換のロジックは数個の数式がそれを解決し、煩雑な計算はコンピュータが一瞬にして処理してしまうのだ。

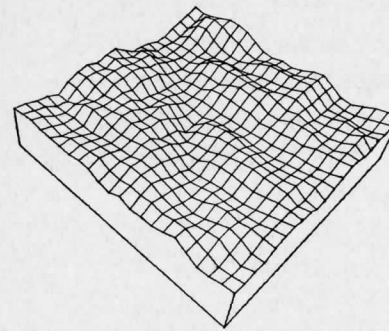


図11 コンピュータで画かせた地形図

それでは式を導いてみよう。我々が物を見る場合のことを思い浮かべてほしい。(図12) まず眼の位置である視点があり、どこに焦点をあわせて見るかの視心がある。そして視点から視心に向かう線は視線になる。視心を含み視線に直交する画面を考える。この画面に物体

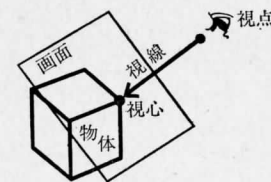


図12 視線と画面

を投影した状態が我々の「見る」という行為であるとするのはごく自然である。

こういった関係をそのまま座標で表現すればよい。いま、3つの直交座標系を考える。物体座標系  $O_0X_0Y_0Z_0$  と視点座標系  $O_eX_eY_eZ_e$  と画面座標系  $O_sX_sY_sZ_s$  である。図13に示すように視点は視点座標系の原点  $O_e$  に、視心は物体座標系の原点  $O_0$  にとっておく。視点  $O_e$  と視心  $O_0$  を結ぶ視線の方向には視点座標系の  $Z_e$  軸を一致させておく。視点  $O_e$  の位置は球座標を用いて表現した。すなわち、経度  $\theta$ 、緯度  $\alpha$ 、距離  $r$  の位置から物体を眺めるといふように。これで物体は物体座標系から視点座標系に移されることになる。

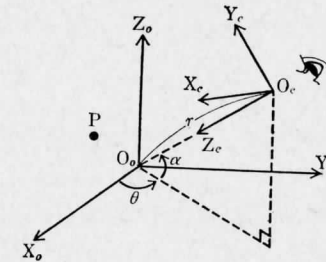


図13 物体座標系と視点座標系

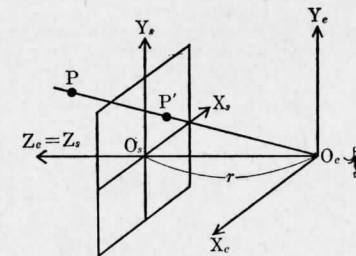


図14 視点座標系と画面座標系

次に、図14に示すように、視点座標系から画面座標系に移さなければならない、 $Z_e$  軸と  $Z_s$  軸は一致させてある。 $X_e$  方向と  $X_s$  方向は反転させてある。なぜなら物体を裏から見ていることになっているから、このようにして求めた画面座標系の点  $P'$  が求める点であった。

座標変換の過程をもう少し細分し、座標系  $\{(x_i, y_i, z_i) \quad i=0, \dots, 6\}$

を考える。物体座標系  $O_0X_0Y_0Z_0$  は  $(x_0, y_0, z_0)$  に、画面座標系  $O_sX_sY_sZ_s$  は  $(x_s, y_s, z_s)$  に対応している。図15を参照しながら順次変換していこう。

1) 視心  $(a, b, c)$  を物体座標系  $O_0X_0Y_0Z_0$  の原点にくるように物体および視点を平行移動する。

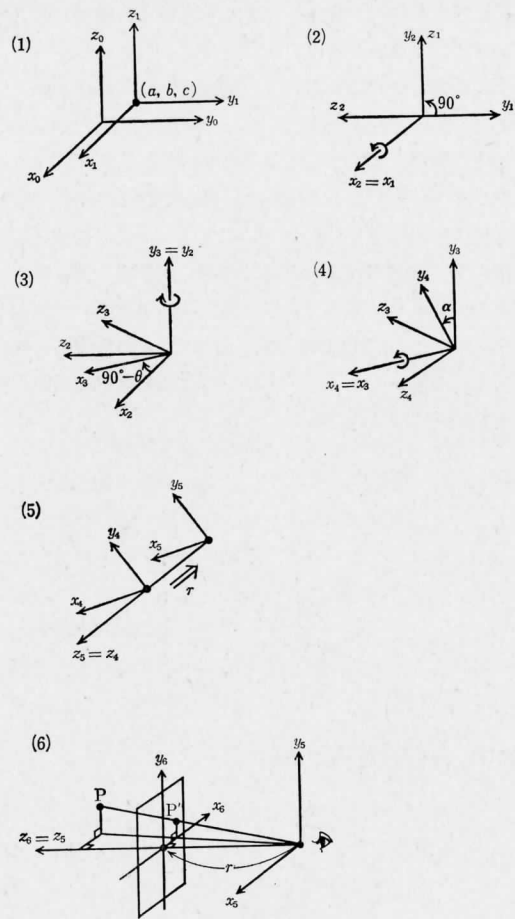


図 15 座標変換 (平行・回転・拡大縮小)

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (1)$$

2)  $x_1$  軸まわりに  $90^\circ$  回転させる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

3)  $y_2$  軸まわりに  $(90^\circ - \theta)$  回転させる。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \theta) & 0 & -\sin(90^\circ - \theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90^\circ - \theta) & 0 & \cos(90^\circ - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

4)  $x_3$  軸まわりに  $\alpha$  回転させる。

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

5)  $z_4$  軸にそって  $r$  だけ移動させる。

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (5)$$

6)  $x_5, y_5$  の値を画面上の値に比例拡大または比例縮小させる。  $x_5$  軸は  $y_5$  軸を対称に反転させる。

$$\frac{x_5}{-x_6} = \frac{y_5}{y_6} = \frac{z_5}{r} \quad (6)$$

ただし  $z_6 = 0$

(6) 式から順に (1) 式まで逆変換して行けば、画面上の座標  $(x_6, y_6, 0)$  は最初の物体の座標  $(x_0, y_0, z_0)$  で求まることになる。

注 1. 図 13 で用いた  $\theta, \alpha$  はともに  $-90^\circ < \theta < 90^\circ, -90^\circ < \alpha < 90^\circ$

とする。この範囲を越えた瞬間、図が反転してしまうなどの不連続性が見られるからである。

注 2. “ $x$  軸まわり回転” と “ $y$  軸まわり回転” の違いは図 16 に示すようになる。 $x$  軸まわり回転は反時計まわりの方向を正とし、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (7)$$

で表わす。 $y$  軸まわり回転は時計まわりの方向を正とし、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (8)$$

で表わす。

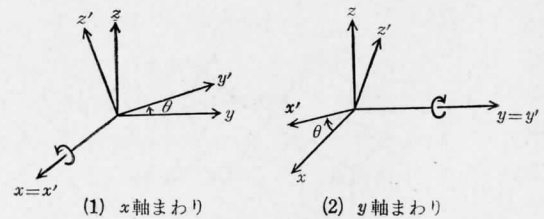


図 16 座標回転

## 6. 一眼から二眼へ

いままで、透視図法は立体を表現する有力な方法でありその手法を示してきた。そこで話をもう一歩進めて、超立体透視図法とでもいうものを考えてみよう。

人間には眼が二つある。そして眼が二つあるために視差というものがある。右の眼と左の眼に写る像は少しズレている。このズレのために超立体を感じることができるのである。図 17 は正八面体を見た透視図である。左眼右眼で見た 2 枚の図である。

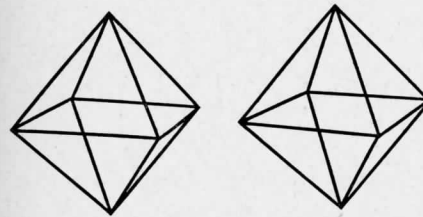


図 17 正八面体の実体視

二つの八面体の間に紙面に直角に紙の仕切りを作り、左右の図がそれぞれ左眼、右眼でしか見られないようにする。緊張しないようにじっと見つめていると左右の図がだんだんと近寄って最後には一つに重なってしまう。

このとき八面体は超立体として感じられる。すなわち紙面から飛びだして見えるのだ。

超立体絵画とでもいうものを画くなら絵を 2 枚画かねばならない。もちろんこのような馬鹿げた画家は一人もいないであろうが、この種のトリックを応用した玩具は多い。ステレオ・スコープと呼ばれるもので、レンズを使ったもの、青赤の色メガネを使ったものなどがある。さらに最近では超立体映画なるものまで考案され上映されている。これは偏光を利用したもので鑑賞用のポロイドグラスが必要である。

人間は眼が二つあることによってどれだけの恩恵を受けているか測り知れない。我々は視覚の不思議を知るとともに、人類に与えられたこの恩恵に感謝の念を忘れてはならないだろう！

### 参考文献

小山清男著『透視図法の基礎』(『別冊アトリエ』No. 116) アトリエ出版社

柿崎祐一・矢野達郎編『心理学』1「知覚・認知」有斐閣双書

(にしやま ゆたか/日本アイ・ビー・エム)

## 培風館

数理科学シリーズ 山内恭彦・弥永昌吉 編集 既刊 8 巻

### ⑧ 関数環 竹之内 脩・阪井 章・貴志一男・神保敏弥著 A 5・328頁 ¥4900

複素変数関数論が現代数学と見事な調和をはかり、壮麗な理論として展開されたのが関数環の理論である。本書は古典と現代の調和を重視して、関数環の理論の現在までの発展の概観を与える斬新な解説書である。

6 数理論理学 7 数理論理学  
—数学的理論の論理的構造— 竹内外史著 A 5・128頁 ¥1500  
—語の問題—  
前原昭二著 A 5・248頁 ¥2200

## 非線形計画法の理論と応用

P.ホイットル著/藤川洋一郎・平本 巖共訳 A 5・272頁 ¥3800

古典的なラグランジュ乗数法を發展させてこれを基礎原理として用い、この原理が OR をはじめ、工学・経済学・物理学・統計学等の種々の分野における最適化問題でどのように最適解を特徴づけることができるかを具体的に示す。

## 非線形最適化問題の反復解法

S.ジャコビ他著/関根智明訳 A 5・308頁 ¥3800

本書は、制約条件のない最適化法のうちでコンピュータ解法に便利な反復解法を網羅しその各種のアルゴリズム(数学的モデルへの変換の仕方、最適化する際の解析の仕方)を通して解説するとともに、その理論的裏づけを行なう。

〒102  
東京都千代田区  
九段南 4-3-12  
Tel (03) 262-5256  
振替東京 4-44725