場だった．一銭で飴玉が二個くらい．その飴玉のことを五厘玉といっていた．
その五厘玉をおいしそうに食べるのを見て父は嘆息した．「何とも物価が高くなったものだ．わしが子どもの頃は一厘で大福餅が買えたのに」とよくいっていた．
貨幣の価値は，時とともに下がる．どうもそんなふうにできているものらしい．

89． その頃，「郵便はがき」いや「官製はがき」といったものだが，楠正成の銅像がマークで一銭五厘だった．
一人の人間を兵隊として徴用するための，召集令状は，一銭五厘の費用で済むところから，その頃，軍隊の上官が兵隊を奴鳴りつけるとき，「貴様たちの命は一銭五厘だ」といった．

90． その頃一銭くれて，「貯金しておけば利子がつく」と親がいった．利子とは何だ，といえば「金が子を産んで増えることだ」といった．その頃，信用組合が配る貯金箱があった．蟻が米俵を運ぶ絵がかいてあったことを覚えている．だまされた，と思って，私はその中に，一銭を貯金した．翌朝起きて見たら，果せるかな，金は子を産んで二銭になっていた．私はその二銭をその日につかってしまった．
おそらく，私が寝ている間に親はあと一銭を投げこんでおいたのだろうが，二銭も使わずにおけばその次は四銭にならねばならぬ．一月もたてばどんなことになるか．

91． 私が六年生の頃，弟は一年生だった．その頃私は，郵便貯金通帳とそっくりの通帳をつくり，私が郵便局になり，弟を預金者に仕立てた．小遣いをもらうと，私が預り，通帳に残高を記して，幼いときから貯蓄の心掛けを養ってやった．たまに喧嘩になると，鉛筆から玩具に至るまで，各自の所有物を一々明確にしなければならなくなり，弟は貯金をぜんぶ引き出す，といいはじめるのだった．私は喧嘩の度に一銭くらいの利子を支払わねばならなかった．

［文中敬称略］

（あんの みつまさ／画家）

（イラストも著者）

●「算私語録」の1〜70は，3月号の特集「遊びの世界に数理する」中の「算私語録」をみてください．——編集部

毛糸巻きの原理

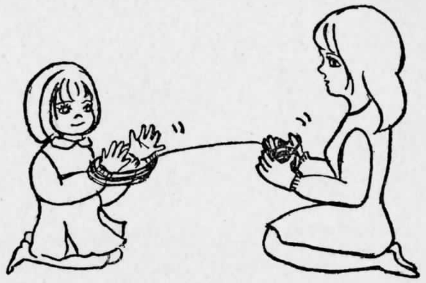


図 1

西山 豊

1. 毛糸の玉はなぜ丸い

♫かあさんは夜なべをして手袋編んでくれた…♫
手袋の季節になった．
北風のピューピュー吹く寒い冬になった．
「かあさんの歌」を口ずさむと私はいつも，小学生だった頃を想い出す．誰しも経験があるように私にも，母は霜やけで手があかぎれないようにと手袋を編んでくれた．その手袋をして，耳をもちぎるほどの冷たい風の吹く中，凍てつく小学校への道を毎日元気に通ったこともあったんだなあと．
編み物は，竹製の二本の編み針でこつこつと日数をかけて仕上げられる．編み物を始める前には，その前作業として毛糸を玉にしておかなければならない．ところが毛糸屋さんから毛糸を買ってきたときは玉の形になっていないため，母や姉に「手伝ってちょうだい」とよく両手首に毛糸を持たされ毛糸巻きを手伝わされたことがある．（図 1）
最近この毛糸の玉のことが気になりだして，妙なことを考えてみることになった．

「毛糸の玉はなぜ丸いのだろう．」（図 2）
「丸いから玉というんだよ．」
「そういう答え方はあまりよくない．」
「では，どう答えればよいのだ．」
「玉が玉たる所以を知るべし．毛糸の玉は楕円体でも卵形体でもない．まさしく球形なんだよ．お母さんが巻こうがお姉さんが巻こうが，おじいさんが巻こうがおばあさんが巻こうが，巻き終ると必ず球形になる．このことが不思議だとは思わないかね．」
「不思議といえば不思議だ．」

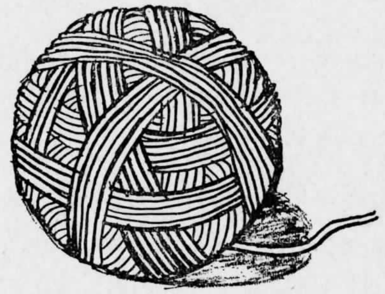


図 2　毛糸の玉

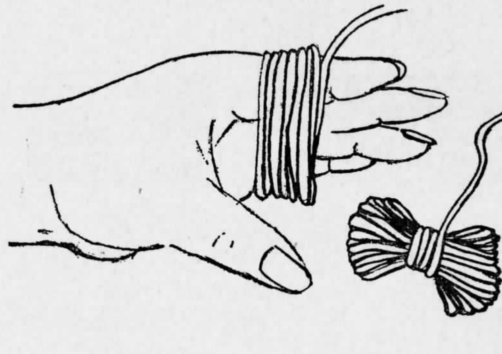


図 3　核づくり

誰が巻こうが，別に球形に巻こうと意識しているのではない．ほつれた毛糸をほどく苦労を考えて，毛糸が弛（たる）まないようにしっかりと巻く行為自体が結果として球を形づくっていることになっているのだ．
それでは弛まないとはどういう状態を言っているのであろうか．それは毛糸巻きの初期の段階である玉の核づくりの中に，もうすでに語られている．（図 3 右）どういう結論に達するか先を急ごう．

2. 等周問題

毛糸の玉のことを少し離れて，日常に見られる球形の物体についてその球形である理由を考えてみたい．
シャボン玉はどうだろうか．重力による歪みはあるが，

大きさは違ってもほぼ完全な球形である．球になるように吹いているのではない．ストローを離れた瞬間からシャボン玉は球形を保とうとするのである．

コンビナートに並ぶ球形のガスタンクはどうだろうか．建設するにはむつかしい筈なのにどうしてわざわざ球形にするのだろうか．球が美しく見えるからか．そうではない．

おおよそ，この世に存在する球形の物体が球形である理由は次の法則を満たすからである．そしてこの美しい自然の法則に感嘆しないではおられないだろう．

『同一体積を囲む曲面のうちで，その表面積が最小なのは球面である．』

この関係は，次元をおとして次のように表現される．

『同一面積を囲む曲線のうちで，その周囲の長さが最小なのは円である．』

または，

『周囲の長さが等しい閉曲線のうちで，その曲線が囲む面積が最大になるのは円のときである．』

これは「等周問題」と呼ばれる数学上の一大問題である．この証明は古くギリシャ時代から試みられてきたが，厳密な証明がなされたのは近代になってからである．

「等周問題」を理解するための一つの面白い実験を紹介しよう．(図 4)

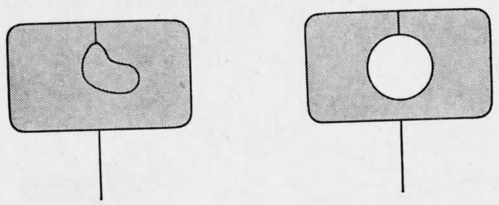


図 4　表面張力

針金と絹糸と針，それに洗剤があればよい．まず針金で枠をつくる．形はどうでもよい．次に絹糸をほぐしてその糸の半分をとり出す．糸の持つ力がセッケン膜の表面張力に勝たないために十分柔らかくしておく．その糸で輪をつくり，針金の枠に結びつける．そして全体にセッケン膜を張りめぐらす．

これで準備は OK！ 輪を針でつつく．その瞬間，約 1 センチメートルぐらいの，数秒間ではあるがきわめて美しい円環ができる．外の針金の枠がどんな形であろうと，糸は円を張るのである．

これは，セッケン膜の表面張力がなせる業である．セッケン膜は最小の面積になろうとし，従って糸の輪は最大の面積になろうとする．その輪の形は必ず円になるというのである．

3. 変分法の基礎

それではぼつぼつ等周問題の証明にとりかかろう．周囲の長さが全て同じの一連の閉曲線を考える．(図 5) これらの閉曲線を次々に，その面積を比較していき，最後に円に辿りつけば万々歳ということである．

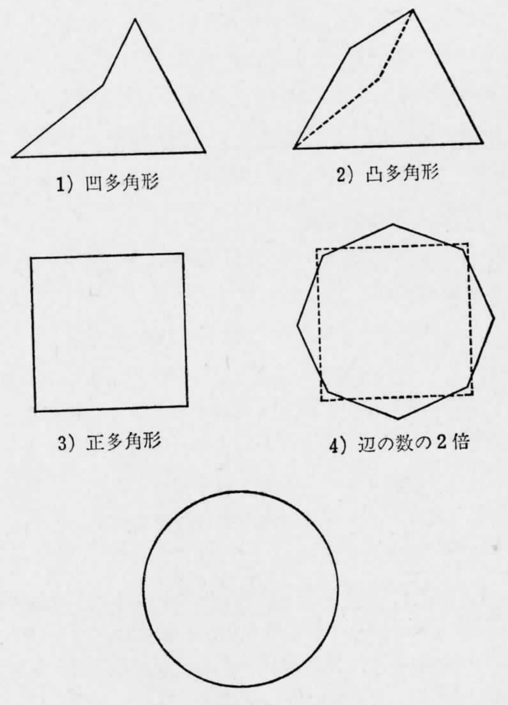


図 5　初等的な証明

まず凹多角形と凸多角形とはどうだろうか．凸多角形の方が大きいのは解りきっている．

次に凸多角形と正多角形とはどうだろうか．少しむつかしいかな．これには次の関係を利用すればよい．

『底辺と周の長さが与えられた三角形のうちで，二等辺三角形が最大の面積をもっている．』

これは，与えられた底辺の両端を焦点とする楕円を描いてみれば，まったく計算もしないでその理由が明らかになる．他の二辺が等しいとき，三角形の高さが一番高くなるのだ．この考えを多角形のとなりあう全ての辺について適用すればよい．そうすれば，辺の長さが全て等しい正多角形の方が大きいことが言えそうだ．

次に，正多角形の辺の数を 2 倍にした場合はどうだろうか．これは計算力だけだ．辺の数を 2 倍，4 倍，8 倍と 2^n 倍していった場合の正多角形の面積を数列として求めてみる．この式からは辺の数が多いほど面積が大きいことがすぐ解る．

そして辺の数を無限にしたとき円になるのだ．

これらの方法は「変分法」と呼ばれている．

証明は一応終った．しかし何かだまされたような気がしないでもない．それは，比較の出発点が曲線ではなく多角形であったことに起因する．多角形を比較していき円に辿りつくのではなくて，いきなり円と一般の閉曲線を比較する証明の方法はないものだろうか．それはある．次の項でそれを示す．

4. 等周不等式

今，凸形の閉曲線を考える．(図 6) これを卵形線ともいう．この閉曲線の周囲の長さを L，曲線が囲む面積

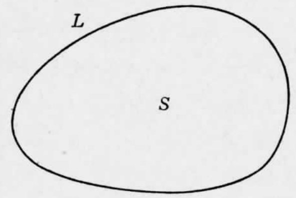


図 6　卵形線

を S とすれば，

$$L^2 \geqq 4\pi S \tag{1}$$

の関係がある．これは等周不等式と呼ばれている．そしてこの等号が成り立つのは閉曲線が円になるときである．円の半径を r とすれば円周 L は $2\pi r$，面積 S は πr^2 であり，$L^2=(2\pi r)^2=4\pi^2 r^2$，$4\pi S=4\pi(\pi r^2)=4\pi^2 r^2$ となり確かにそうなっている．

今，円と一般閉曲線の周長をともに L とし，円の面積を S_0，一般閉曲線の面積を S とする．円には $L^2=4\pi S_0$ の，一般閉曲線には $L^2>4\pi S$ の関係があるから $S_0>S$ となり，円の面積が常に大きいことがわかる．

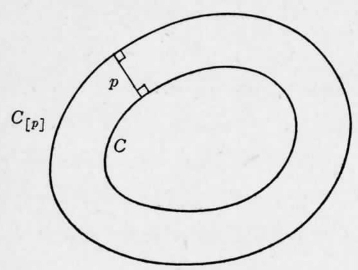


図 7　平行曲線

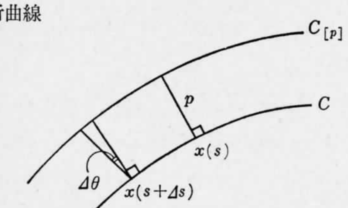


図 8　曲線間の面積（微小区間）

この等周不等式に対するフロベニウス (Frobenius) の証明 (1915) を紹介しよう．

卵形線 C と，この曲線から法線方向に p だけ離れた平行曲線 $C_{[p]}$ を考える．(図 7) C と $C_{[p]}$ は相似の関係ではない．C と $C_{[p]}$ で囲まれたドーナツ状の面積を求めてみる．そのために微小区間を考える．(図 8)

卵形線 C 上での点で $x(s)$ と $x(s+\Delta s)$ との間の面積は，長方形の部分と扇形の部分との合計で求まるから，

$$p\Delta s+\frac{1}{2}p^2\Delta\theta \tag{2}$$

これを θ について一周分，0 から 2π まで積分すれば全体の面積になる．従って卵形線 C が囲む面積を S，平行曲線 $C_{[p]}$ が囲む面積を $S_{[p]}$ とすれば，

$$S_{[p]}-S=pL+p^2\pi \tag{3}$$

となる．

さて，卵形線 C に外接する三角形 XYZ を考える．(図 9) さらに今度は逆に，この三角形に内接する円を考える．(図 10)

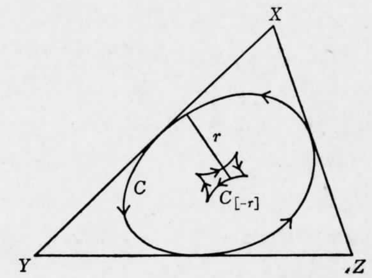


図 9　卵形線

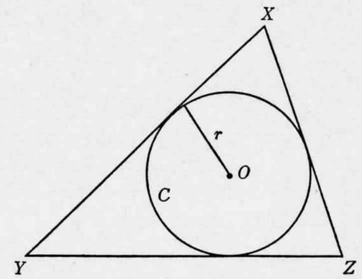


図 10　円

今まで平行曲線は卵形線 C の外側にとってきたが，ここで内側にとってみる．$p=-r$（r は内接円の半径）とすれば，閉曲線が円の場合は図 10 より，

$$S_{[-r]}=0 \tag{4}$$

となるが，卵形線の場合は一般に

$$S_{[-r]}<0 \tag{5}$$

となる．それは図 9 をみればわかるように，$C_{[-r]}$ が囲む領域は，曲線の進行方向に対して右側にくるから面積がマイナスになるのである．

(4), (5) より

$$S_{[-r]} \leqq 0 \tag{6}$$

さて (3) 式の S を右に移項して，p について整頓すれば，

$$S_{[p]} = \pi p^2 + Lp + S \tag{7}$$

となり，p についての二次式となる．(6) 式より，$S_{[p]} \leqq 0$ であるから，方程式

$$\pi p^2 + Lp + S = 0 \tag{8}$$

は p について実根を持つことになる．従って

$$\text{判別式} = L^2 - 4\pi S \geqq 0 \tag{9}$$

となり，これで等周不等式 (1) が証明されたことになる．

5. つりあいの状態

毛糸の玉がどうして球形になるのかという問題に対して，今までは体積とか面積とかいったいわば静的な説明をしてきた．ここで立場を変えて力学的な，動的な説明を試みてみたい．

流体や気体の圧力と同じように毛糸の圧力とでもいうものがあってもいいと思う．毛糸の玉の断面を考えると，各々の層には内部の毛糸圧 P_1 と外部の毛糸圧 P_0 があり，もちろん内部の圧力の方が大きい．(図 11) この圧力差を押えているのは毛糸の張力である．

さて毛糸の材質を均一なものであると仮定すると，となりあわせる張力は互いに打ち消され，この力は結局考えなくてよいから図 11 に示した矢印の力が全体としてつりあっていればよいことになる．

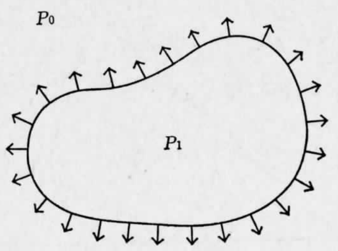


図 11　毛糸の圧力

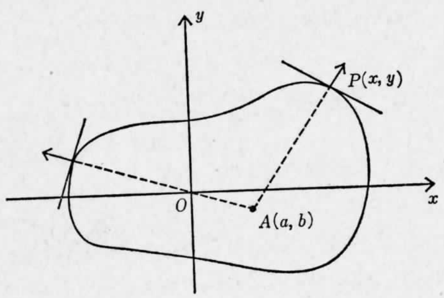


図 12　法線は定点で交わらなければならない

今，毛糸の一周分をモデル化した閉曲線を考える．(図 12) この閉曲線は均一な微小区間に分れている．そしてこの閉曲線に対して，

『圧力は接する面に対して垂直にはたらく』

という「パスカルの原理」を適用する．

閉曲線上の点 $P(x, y)$ での接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ であるから，法線の傾きは $-\dfrac{dx}{dy}$ となる．従って P 点を通る法線の方程式は

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x) \tag{10}$$

となる．法線と圧力の方向が一致する．そして圧力は全ての点で等しいから，結局この法線がある定点 $A(a, b)$ で交われば向いあっている力がつりあうことになり，全体としてもつりあっていることになる．(10) 式に (a, b) を代入し，微分方程式を解けば，

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = C \qquad (C \text{ は積分定数}) \tag{11}$$

を得る．(11) 式はまさしく円である．

以上の説明はあまりにも乱暴すぎるだろうか．

6. 転がらないための工夫

♫…着てはもらえぬセーターを，寒さこらえて編んでます…♫

どうも編み物や手芸は女がすることになってしまっている．これは本来こまごまとした几帳面なことは女性に向いているとする生体上の宿命なのか，それとも女性に家事労働を縛りつけてきた歴史上の悪しき遺産なのであろうか．私は後者の見解に軍配を上げたい．男性だって編み物をする．そのことがどうして女々しいのだろうか．「この帽子，俺が編んだんだぜ」と自慢する友達を私は知っている．ただし私はまだ編み物に挑戦したことはない．

それはともかく，私はこの歌を口ずさみながらふと変なことを連想して，一人笑いをしたことがある．もしかして，「北の宿から」に出てくる主人公は手編みではなく機械編みでセーターを編んでいたのではなかっただろうかと，なぜなら手袋ほどの小物なら手編みでよいが，セーターともなれば手間も暇もかかろうというものだ．手指も肩も疲れるし機械でジャージャーと編むほうが楽にきまっている．

もちろん，作詞者は手編みを想定している．寒さをこらえてこつこつと編んでいる姿こそ哀れを誘うもの．それを機械などでジャージャーやれば速く編めるものの，悲劇のヒロインはたちまち喜劇の役者に変ってしまうことだろう．

機械編みは最近特に普及している．手編みはあまり見られなくなった．この技術革新に対して一つの厄介なことがある．それは，機械には図 2 のような毛糸の玉はつけられないということである．

手編みの場合の糸の速度は毎秒 1 センチメートルぐらいであろう．ところが機械編みの場合は毎秒 50 センチメートルぐらいの驚異的な速度となる．そのために毛糸の玉はあっちに行ったりこっちに来たりして畳の上をころころと駆け回るであろう．かといって毛糸の玉を持っていればよいわけでもない．どこを持っていればよいのか困るからである．

こうなれば大変．図 2 に示した毛糸の玉は手編みには適しているものの機械編みには向かないのだ．さあどうする．何かうまい方法はないものか．ある，ある．転がらない巻き方があるのだ．(図 13)

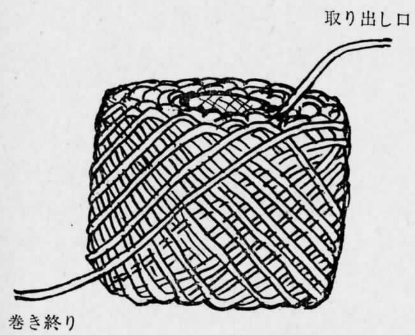


図 13　転がらない毛糸の巻き方

これには図 14 のような簡単な巻き取り機が必要だ．右下のハンドルを回すことによって，歯車を介して中央にある円筒が斜めに傾いたまま回転する．この円筒に毛糸を巻きつけようというのだ．位相を少しずつずらすように設計されているから，円筒の表面を満遍なく覆えることになる．(図 15)

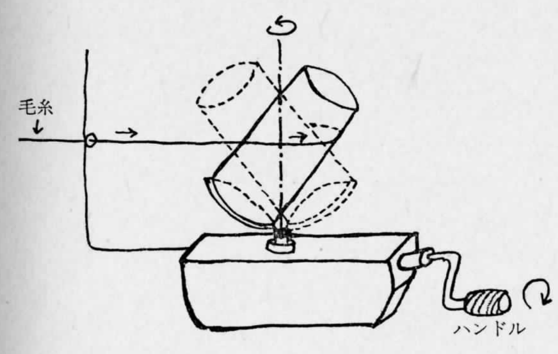


図 14　毛糸巻き取り機

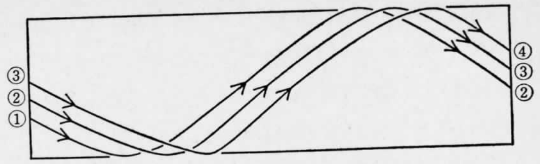


図 15　毛糸の軌跡

巻き終った毛糸の玉は球ではなく円柱状となる．機械につなぐための取り出し口は，巻き始めた内側の方の端である．この巻き方なら毛糸の玉は転がらないし，最後まで形をくずさないでいける．

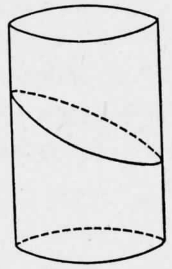


図 16　円柱の切り口

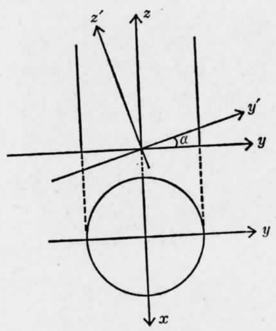
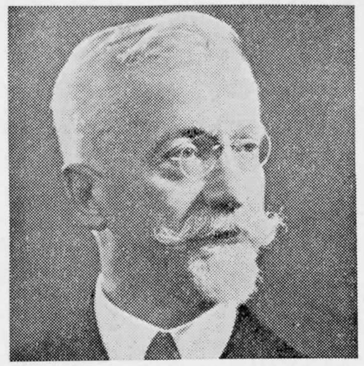


図 17

毛糸の軌跡が楕円であることはすぐ解る．円柱の切り口は楕円であることと同じ問題となる．（図 16）図 17 を見ながら座標軸回転の公式を用いて試されたい．

（にしやま ゆたか／日本アイ・ピー・エム）
（え／著者）

エリ・カルタンの数学 I


エリ・カルタン

杉浦光夫

§ 1. カルタンの生涯と数学

エリ・カルタン (Elie Cartan, 1869—1951) は今世紀前半において最も重要な仕事をした数学者の一人である．

その広大な数学の中心をなすリー群論における業績の，数学史上の意義を考えてみるのが本稿の目標である．

始めにカルタンの生涯とその主な仕事を概観しよう．リー群に関する仕事は後でもっと詳しく紹介する．

カルタンはフランスのイゼール県ドロミューに生れた．幼いときからすぐれた能力を示したカルタンは，中学校の給費生となり，19歳のときエコール・ノルマル (Ecole Normale supérieur) の学生となった．91 年卒業した後 94 年に学位論文「有限次元連続群の構造について」を提出し，パリ大学理学部から理学博士の学位を得た．この学位論文は，キリングの仕事を受継ぎ，複素単純リー環の構造論を展開し，その完全な分類を与えたもので，彼の以後の仕事の基礎となったものである．

彼は 1894 年から 96 年までモンペリエ大学の講師を勤め，96 年から 1903 年まではリヨン大学講師であった．この間カルタンは 1898 年に「双線型群と多元数系」という論文で，複素数体および実数体上の単純多元環の構造を決定した．$\boldsymbol{C}$ または $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ 上の全行列環と同型になるというのがその結果である．これは後に 1907 年になってウエッダーバンによって一般の体の上の定理に拡張された．カルタンの用いた方法は，彼が学位論文でリー環に対して用いた方法を転用したものである．すでに 1884 年にポアンカレが，実または複素多元環の単位元の近傍は乗法に関してリー群芽を作ることを注意している．この論文の標題にある双線型群とは，このリー群芽のことである．リー環より古くから研究され，結果も簡単な多元環の方の分類がリー環の分類より後になったのは興味深いことである．これは「組成列」とか「単純」といった概念は方程式論との関連で最初群について導入され，リー環はリー群に対応するものなので，単純リー環の概念の重要性が早くから認識されていたことによるものと思われる．

1899 年から 1901 年にかけてカルタンはパッフ系(一階微分式系）すなわち連立全微分方程式の解法を研究した．この研究において，カルタンは微分形式の外積と外微分の演算を導入し，それらがきわめて有効であることを示した．外微分形式はカルタンの愛用の武器として，後々まで何度も有効に利用された．そして与えられたパッフ系のすべての積分多様体を見出せというパッフの問題をカルタンは取上げた．特に彼はパッフ系の種数なる概念を導入し，種数が g の系は g 次元積分多様体を持つことを証明した．さらに彼は包含系の概念を定義し，任意のパッフ系は変数を増すことによって包含系になし得るかという問題を考えた．これらは全微分方程式系の理論で基本的な結果である（松田道彦『外微分形式の理論』参照)．

1903 年から 1909 年までカルタンはナンシー大学教授であったが，この間に彼は有名な無限連続変換群 (groupes infinies de transformations) の研究を行った．

ある領域の実または複素解析的変換の集合で，変換の合成および逆変換を作ることで閉じており，かつある偏微分方程式系の一般解となっているものを一般に連続変換（準）群と呼ぶ．例えば $\boldsymbol{C}^n$ のある領域の解析変換の全体はその一例である．この場合偏微分方程式系はコーシー－リーマンの方程式である．一般にこの偏微分方程式系が完全積分可能のとき，有限連続変換群といい，そうでないとき無限連続変換群という．有限連続変換群の場合は，その各変換は初期値である有限個の実数（または複素数）の組を与えれば定まるから，有限個の数の組をパラメタとして持つ．そこで大雑把にいえば，このとき群は通常の有限次元多様体と考えてよい．

ところが無限連続変換群の場合は，与えられた偏微分方程式系の一般解は，有限個の任意函数を含む．そのた