題名のない芸術作品

振動の模型を解析する

西山 豊

● 東京見物

待ちに待った修学旅行.

小さい胸をはずませながら田舎を発ったのは，夜も明けやらぬ朝5時頃だった．鈍行列車に揺られて辿りついたのが熱海．ここで一泊し，箱根を回り，今日はいよいよ首都東京である.

東京タワー，国会議事堂，羽田飛行場，上野公園，そして皇居前での写真撮影．おきまりのコースを『はとバス』に乗って見学する．見るもの聞くもの全てが新しかった．あの時の興奮，感動を今もはっきり覚えている.

…………………………………………………………………

私にはもう修学旅行というものがない．しかし仕事の関係で東京にはよく出張する．だからある面から見れば，何回も修学旅行のようなものをしていることになるのだが，今の私には東京見物といっても何の感動も与えない．今さら東京タワーに昇って見ようという気が起らないのだ.

それはどうしてだろうか.

私が都会に住むようになったことも一理ある．毎日の生活が鉄筋コンクリートの中で営まれると，建物はもはや見物の対象にはなりえないのだ．さらに最近は超高層ビルが次々と建てられるため，東京タワーも影が薄くなってきているというのも事実だ.

もう見るところがなくなってしまった東京.

しかし，一つだけ楽しみにしている場所がある．それは西新宿にある住友ビルだ．別にビルを見たいのではない．ビルの入口近くにそれは実に面白い造形物がある.（図 1） 4階建てのビルの骨組の模型であろう．高さは8メートルもある．この造形物は，6～7 秒を一周期として図2のような揺れかたをする．まるで建物の振動の様子をスロー・モーションで見るようである.

造形物には何の説明もないが，「このビルはコンピュータで綿密に計算されていますから，地震がきても決して倒れません．だから安心してお入り下さい.」と語りかけているようだ．超高層ビルに入る人々に対する，いわば精神安定剤の役目を果しているのである.

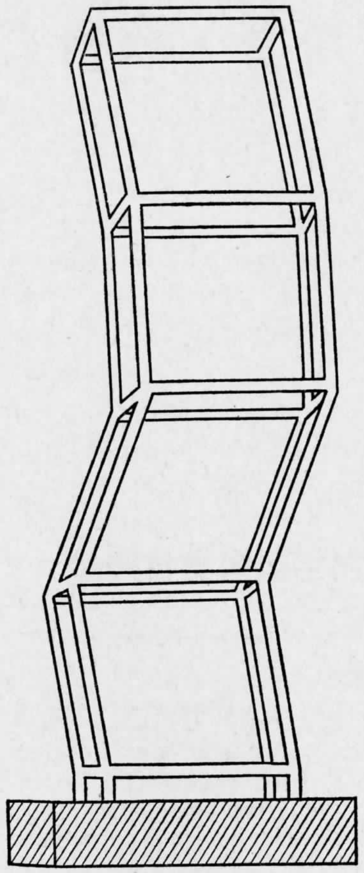


図 1

実によくできている.

どんなに揺れても，屋上は完全に静止している．こんなことが可能なのだろうかと私も一瞬疑った.

私は，この造形物の秘密を知りたかった.

東京に出張する時はいつもこの仕組みを考えてみることにしていた．そして今回，遂に写真機まで持ち込んで本格的に解明することになったのである.

この造形物は実にうまくトリックを利用している．トリックを考えついた製作者には感服する．私はトリックの解明の中である重大なことを発見することになった．それは，この稿の最後に述べることにしよう．それまでのお楽しみだ.

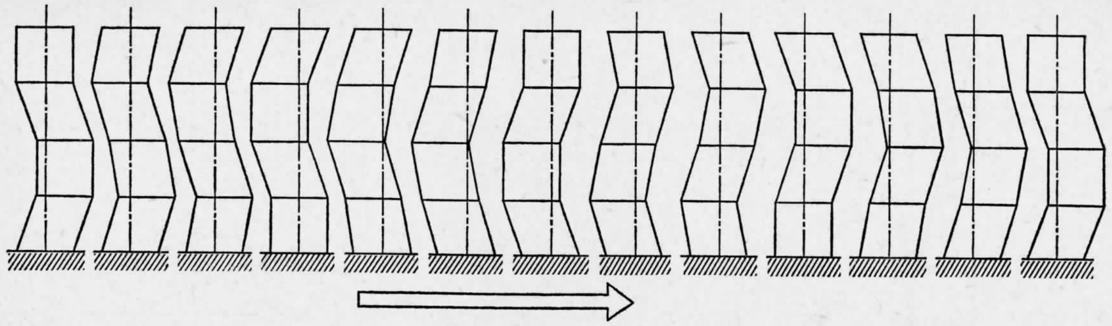


図 2

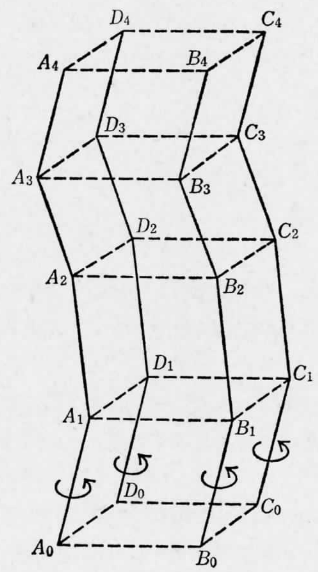


図 3

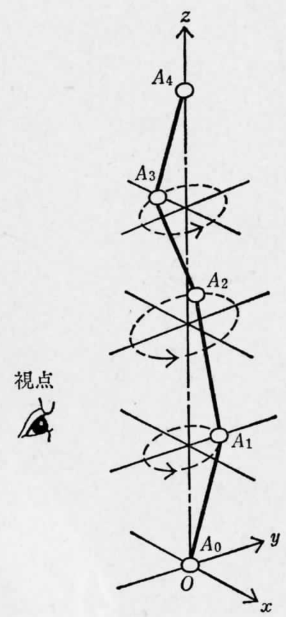


図 4

● 視覚のトリック

それではこの造形物のトリックを説明しよう．説明を解り易くするために図3のように節点に記号をつける．結論を先に言えば，実線で示した4本の平行な棒（$A_0A_1A_2A_3A_4$, ～, $D_0D_1D_2D_3D_4$）が回転しているのだ．ただしこの棒は三次元的に曲りくねった棒である.

点線で示した建物の各階の床（$A_0B_0C_0D_0$, ～, $A_4B_4C_4D_4$）はこの棒の動きに従って動いているだけである.

棒の一本を図4に示す．A_0～A_4 の各節点を (x, y, z) 座標で示せば右（(1) 式）のようになる.

A_0 と A_4 は z 軸上に固定された節点である.

A_1, A_2, A_3 は xy 平面に平行な平面上にあり（A_1 は $z=c$, A_2 は $z=2c$, A_3 は $z=3c$），各々円周上を回転している．位相が $\frac{\pi}{4}$ ずつ先行しているが，角速度 ω がともに等しいために各節点間の距離 A_0A_1, ～, A_3A_4 は

$$\left.\begin{array}{ll}
A_0(& 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0\ ) \\
A_1 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega t \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega t, \quad , \quad c\right) \\
A_2 & \left(\cos\omega\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad \sin\omega\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad 2c\right) \\
A_3 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \quad 3c\right) \\
A_4(& 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 4c)
\end{array}\right\} \quad (1)$$

ω：角速度　　t：時刻　　c：定数

常に一定である．このことは特に重要である.

このような造形物を，青空を背景にして見た時どのように映るであろうか．前後の感覚がなくなり，ちょうど xz 平面に投影されたものとして見ることになる．A_1～A_4 の x 方向の運動を x_1, ～, x_4 で示せば,

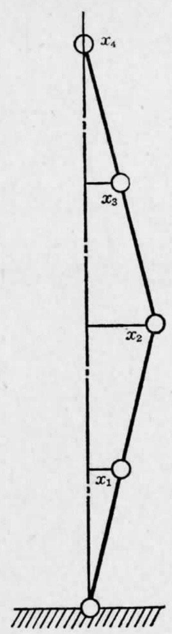


図 5

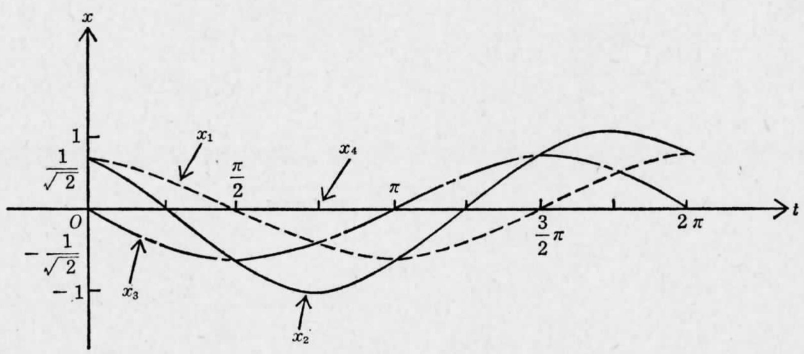


図 6

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega t \\
x_2 &= \cos\omega\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \\
x_4 &\equiv 0 \qquad \text{（固定）}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2}
$$

となる．（図 5, 6）位相のずれは波が伝わっていく様子を表現している．

半周期分の造形物の動きと，その投影図を図 7 に示す．見物人には立体図としてではなく，投影図としてしか認識されないのである．ここにこの造形物がトリックとして成り立つ条件がある．

● 地震と建物

地震がきた時建物はどのように振動するのであろうか．図 1 に示した造形物は振動の模型とも芸術作品とも解らないものであったが，もっと本格的な物理の実験装置がある．（図 8）

台の上には長さの違うプラスチックの切片が垂直に取りつけられている．台は静止の状態からゆっくりと揺れはじめ，次第に振動数を増していく．この時切片は長さの大きい方から順に揺れはじめ，振動数が増すにつれ揺れる切片は左側の小さい切片に移っていく．台の上の 4 枚の切片が同時に揺れることはない．また，4 枚とも揺れない時もある．台の振動数と切片のもつ固有振動数が一致した時はじめて揺れるのである．これを共振現象という．

だから高い建物ほど地震に弱いとは一般に言えない．地震が来て，中層のビルだけが被害をうけたということもありうるのだ．

それでは建物の固有振動数について考えてみよう．

まず簡単な一階建てのモデルからはじめる．（図 9）建物は質量 m とせん断ばね k とで成りたち，左右に単振動している．この質点には大きさが変位 x に比例し，常に原点に向かう引力（復元力ともいう）が働いている．だからこの質点についての運動方程式は，

$$F=m\ddot{x}=-kx \tag{3}$$

（$\ddot{x}$ は加速度）

となる．今変位 x を

$$x=A\cos\omega t \tag{4}$$

（A は振幅，ω は角速度）

で表わせば，加速度は

$$\ddot{x}=-\omega^2 A\cos\omega t \tag{5}$$

となり，(4), (5) を (3) に代入すれば ω が求まり，振動数 n は

$$n=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

となる．

次に図 1 の造形物と同じである 4 階建てのモデルにつ

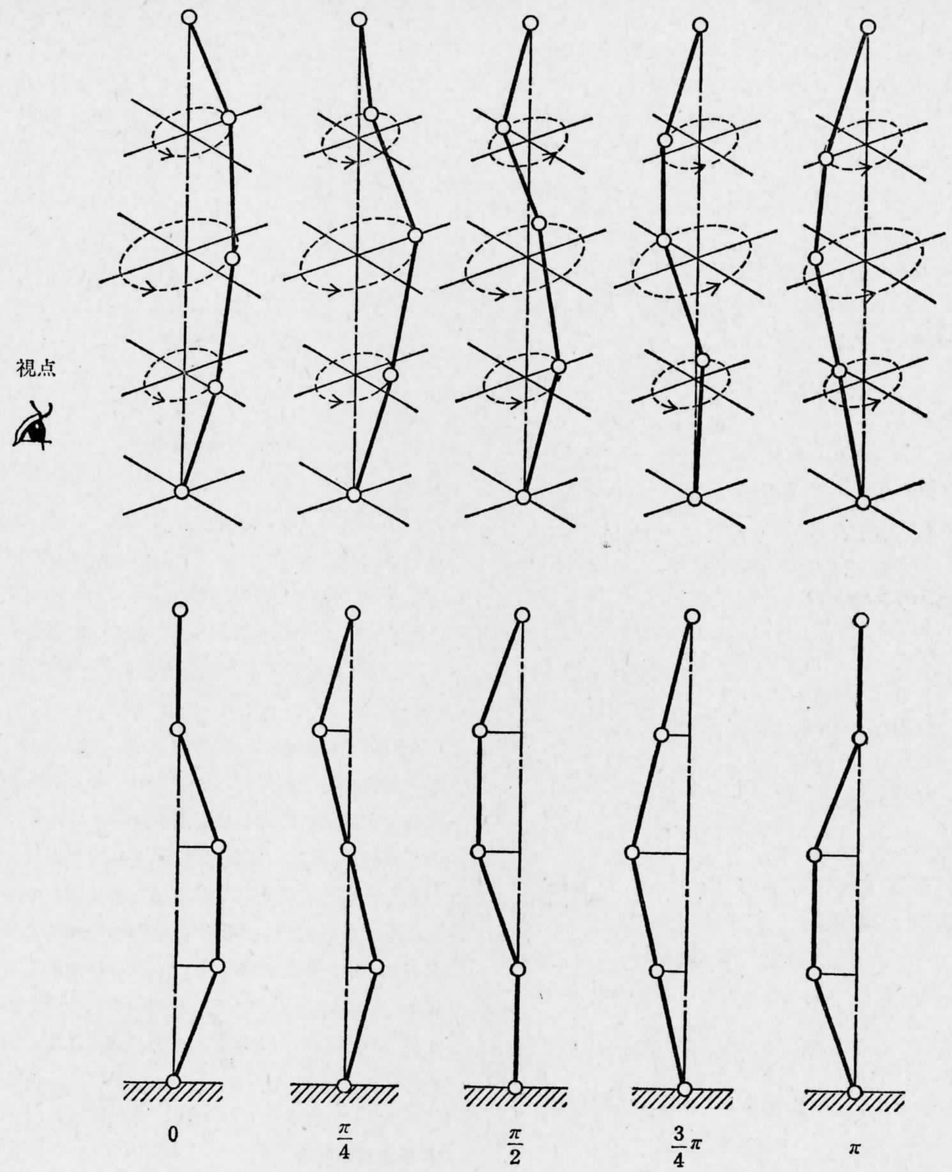


図 7　立体図（上）と投影図（下）

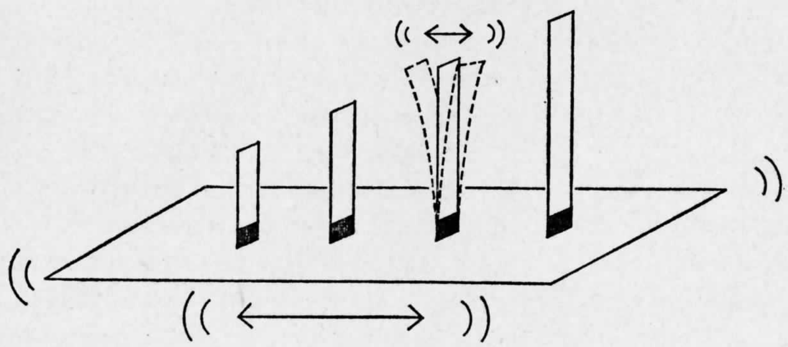


図 8　共振現象

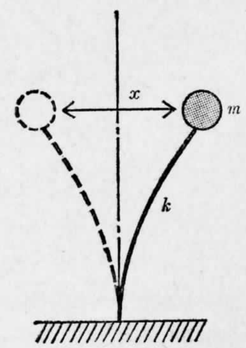


図 9

いて考えてみよう．(図 10)

この場合は 1 階建てのモデルのように簡単にはいかない．各質点の質量を $m_1 \sim m_4$，ばね定数を $k_1 \sim k_4$，変位を $x_1 \sim x_4$ とする．各々の質点について運動方程式を求めてみると，

$$\left.\begin{aligned}
-m_1\ddot{x}_1 &= k_1x_1 - k_2(x_2-x_1)\\
&= (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2\\
-m_2\ddot{x}_2 &= k_2(x_2-x_1) - k_3(x_3-x_2)\\
&= -k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 - k_3x_3\\
-m_3\ddot{x}_3 &= k_3(x_3-x_2) - k_4(x_4-x_3)\\
&= -k_3x_2 + (k_3+k_4)x_3 - k_4x_4\\
-m_4\ddot{x}_4 &= k_4(x_4-x_3)\\
&= -k_4x_3 + k_4x_4
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

これを行列方式で書きかえれば，

$$-\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\\ \ddot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0\\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4\\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} \qquad (7)'$$

となり，もっと簡略して

$$-M\ddot{X} = KX \qquad (7)''$$

となる．M を質量行列，K を剛性行列，X を変位ベクトル，$\ddot{X}$ を加速度ベクトルと呼んでいる．

それではこの質点系の固有振動数を求めてみよう．

各質点は，振幅の大きさは異なるが角速度 ω が一定で振動しているとして，各質点の変位を

$$x_i = A_i \cos \omega t \qquad (i=1\sim4) \qquad (8)$$

で表わす．この式の二階微分をとれば加速度が求まり，

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 A_i \cos \omega t \qquad (i=1\sim4) \qquad (9)$$

となる．(8), (9) を (7)′ に代入し，$\cos \omega t$ で両辺を割れば次の (10) 式となる．

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}\omega^2\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0\\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4\\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{bmatrix} \qquad (10)$$

$\omega^2=\lambda$ とおき，$[A_1\ A_2\ A_3\ A_4]^t = \boldsymbol{A}$ として (10) 式を簡略化すれば，

$$\lambda MA = KA \qquad (10)'$$

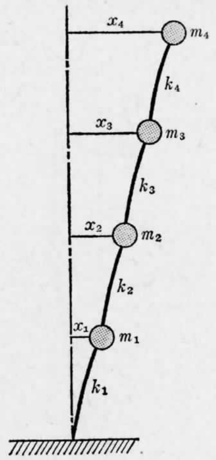


図 10

となる．M と K は定数として与えられているが，λ と $\boldsymbol{A}$ は未知数である．(10)′ において，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 以外の解を与える λ の値を固有値と呼び，その λ に対する $\boldsymbol{A}$ の値を固有ベクトルと呼ぶ．固有値からは固有振動数が求まり，固有ベクトルからは固有振動形（各質点の振幅比）が求まる．

4 階建ての場合は，固有値 λ は 4 個，固有ベクトルも 4 個求まる．固有値の小さい順，すなわち固有周期の大きい順に求めた固有振動形を図 11 に示す．

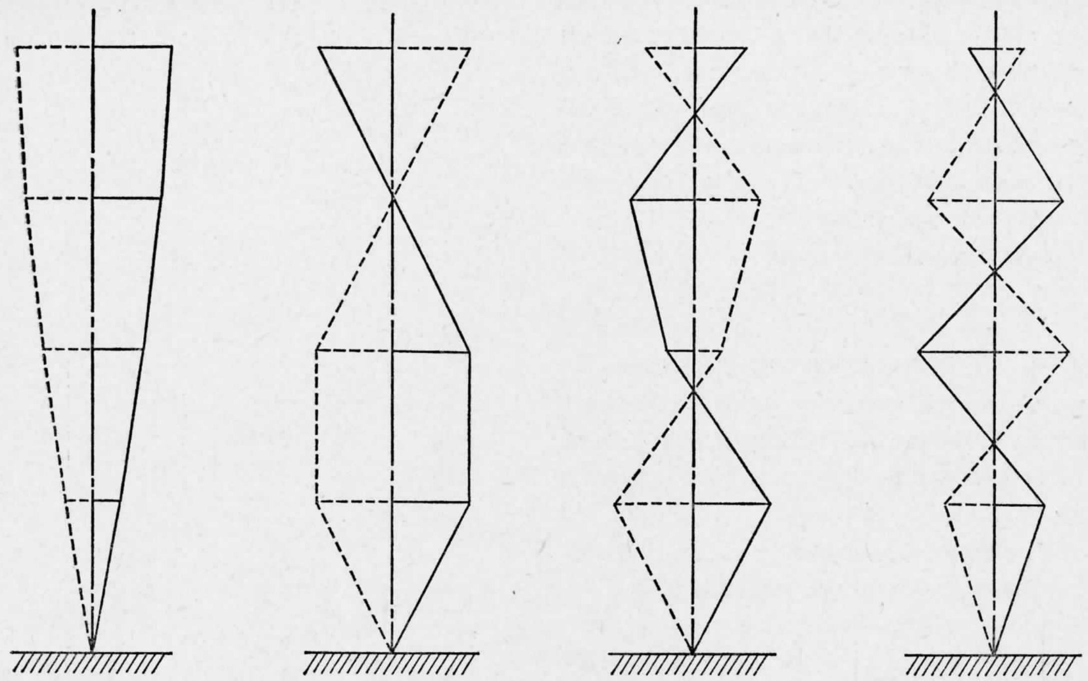
この計算には，各階の質量およびばね定数を全て等しいものとした．建物の揺れ方はこの 4 通りしかなく，これ以外はない．この 4 通りの振動形に対して共通して言えることは，地面に接している部分は静止し，屋上の部分は自由に振動していることだ．これを固定端，自由端という．そして，このことは次の議論に深く関係してくる．

●不自然な動き

話しを元に戻そう．

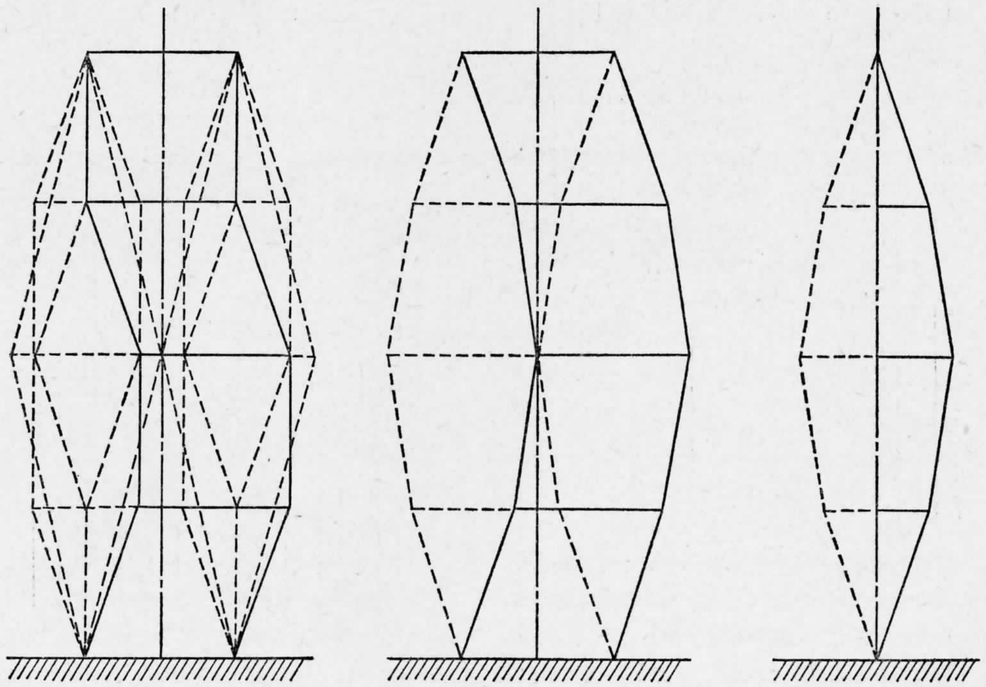
私が今回造形物の解明に取りくむきっかけになったのは，トリックに対する興味もさることながら，この造形物の揺れ方がどうも不自然に思えてならなかったからである．屋上が完全に静止しているのがどこかおかしく感じられる．図 11 が示すように屋上は自由端であるから決して静止はせず，むしろ一番よく揺れる箇所である．

振動の形から，造形物の示す構造物がいかなるものかを推定しよう．すなわち，各階の質量とばね定数を逆算してみよう．そして驚くことに，このような構造物は実は全く不安定であるといったことになる．造形物の製作者の意図とは逆の結論に．



1次　2次　3次　4次

図 11　固有振動形



(1)　(2)　(3)

図 12

まず振動形を決める．この造形物は 6~7 秒を一周期として図 2 のような一連の動きをしている．この動きは波動と振動の両方を含んでいるので，これらの形を重ね合わせることによって波動を打ち消す．（図 12 (1)）そして揺れの最大位置（包絡線）を書いてみる．（図 12 (2)）振動は 1 本の柱について考えればよいから，結局この造形物の振動形は図 12 (3) であることになる．

式 (2) より各階の振幅がわかり，

$$\boldsymbol{A}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^t \tag{11}$$

となる．(11) をいきなり (10) 式に代入して m_1~m_4, k_1~k_4 を求めればよいのだが，未知数が 8 個，式が 4 個で解が定まらないので，（イ）質量を一定とした場合と，（ロ）ばね定数を一定とした場合の各々について検討していきたい．

（イ）質量を一定とした場合

$m_i=m$ $(i=1\sim4)$ とすれば (10) 式は，

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{12}$$

となり，$m\omega^2=\lambda$ とおいて左辺にまとめれば，

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-\lambda & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3-\lambda & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4-\lambda & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

となる．これを k_1~k_4 について解けば，

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \dfrac{A_1+A_2+A_3+A_4}{A_1} \\ \dfrac{A_2+A_3+A_4}{A_2-A_1} \\ \dfrac{A_3+A_4}{A_3-A_2} \\ \dfrac{A_4}{A_4-A_3} \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる．ばね定数は正でなければならない．そのためには，すくなくとも (14) 式より $A_3>A_2>A_1$ が満たされねばならない．ところが (11) 式では $A_2>A_3$ であるから，このことと矛盾する．したがって質量を一定とした場合の解はありえないことになる．

（ロ）ばね定数を一定とした場合

$k_i=k$ $(i=1\sim4)$ とすれば (10) 式は，

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となり，$\dfrac{\omega^2}{k}=\lambda$ とおいて左辺にまとめれば

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda m_1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda m_2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda m_3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{16}$$

となる．これを m_1~m_4 について解けば，

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \dfrac{2A_1-A_2}{A_1} \\ \dfrac{-A_1+2A_2-A_3}{A_2} \\ \dfrac{-A_2+2A_3-A_4}{A_3} \\ \dfrac{A_4-A_3}{A_4} \end{bmatrix} \tag{17}$$

となる．質量は正でなければならない．(17) 式より $A_4 \neq 0$ であることを考慮して，(11) 式を少し変えた $\boldsymbol{A}$ を仮定する．

$$\boldsymbol{A}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\varepsilon\right]^t \qquad \varepsilon>0 \tag{18}$$

(18) 式は m_1~$m_4>0$ を満たしている．(18) を (17) に代入すれば，

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \frac{2-\sqrt{2}}{\lambda} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+(2+\sqrt{2})\varepsilon \\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon}\right) \end{bmatrix} \tag{19}$$

となる．$\lambda=2-\sqrt{2}$ とおいて，$\varepsilon\to0$ とすれば，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \infty \end{bmatrix}$$

となる．

このことは一体何を意味するのだろうか．

図 12 (3) のような振動形をもつ構造物は，屋上の質

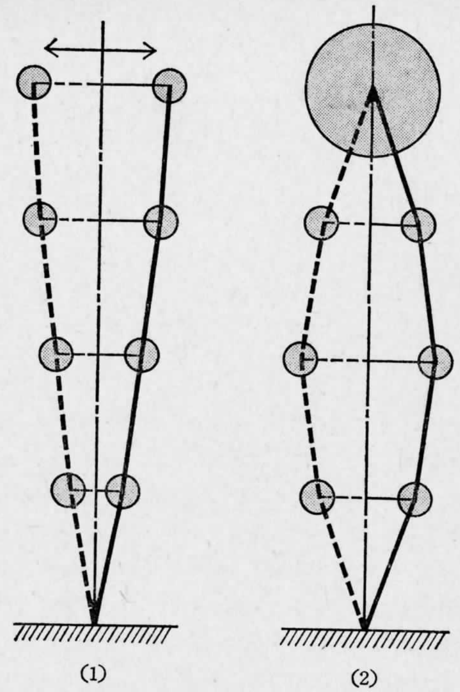


図 13

量が無限大であるような構造物である．（図 13 (2)）

何と恐ろしいことか！

現実は図 13 (1) のように振動するのに．

もう一つ付け加えておきたいのは，振動の伝わり方についてである．図 2 や図 6 からもわかる通り，この造形物の振動は上から下に伝わっている．これも不自然だ．振動は地面から建物の屋上に向かうべきで，図 3 に示した棒の回転方向を逆にすべきである．

● それでも地震は起る

造形物のトリックの解明のつもりであったが，とんだ発見をすることになってしまった．この造形物を見て，「建物は真中の階よりむしろ屋上の階の方が揺れが小さく安全だ．なぜならコンピュータで屋上を静止するように設計されているから．」と勘違いされていた方も多いのではないだろうか．

私たちはトリックに騙されやすいものである．トリックは一見正しくみえる．だから罪深い．

この造形物を建物の横におくことも一種のトリックではないだろうか．「この建物はコンピュータで計算されていますから，どんな地震がきても安全です」と人々に思いこませるトリックであると．

もちろん，すぐれた建築家，設計士を非難しようというのではない．私の言いたいのは，どんなに素晴しく完璧に設計されようとも地震は必ず起るということである．日本は地震大国である．そういう宿命を持たされているにもかかわらず，狭い都心に超高層ビルを競い合って建てているのである．農村と都市の過疎過密問題，総合的な都市計画．この問題を抜きにした建築技術の発展だけでは抜本的な地震対策にはなりえないのだ．

おもちゃとしてのトリックは愉快であるが，トリックはおもちゃだけにしておきたいものだ．

（にしやま ゆたか／日本アイ・ビー・エム）