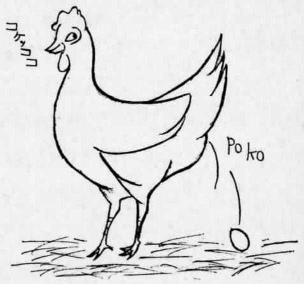
卵の形



西山 豊

1. 神は自然を造り給う

「卵はなぜ『卵型』なのでしょうか.」

これは,『卵の実験』(伏見康治・伏見満枝著，福音館) という本の書き出しの言葉である．日頃考えてもみない問いかけに，私は少々面喰らってしまった．卵だから卵型と言っているのじゃないのかなあ．円だったら円型と言っているように．卵型に何か意味があるのだろうか．この本は，一体，何を語ろうとしているのだろうか．と疑いながらも，このひとくせある問いかけに，ある種の期待を寄せながら，その先を読むと……

「もし卵がまん丸だったら，親鳥が傾斜地に卵を産み落とすと，どこまでも卵はころがっていってしまうでしょう．しかし,『卵型』をしていれば，卵はころがりだしても，とちゅうで方向が変わって，あるところまでいって，そこで止まってしまうでしょう.」

これは，ひどいこじつけだ．にわとりが卵を産み落とすとき，絞り出すから歪んだ形になるのだろう．その歪みのため，結果として，たまたま転がらないのだろう．でも，面白い解釈だ．解釈は人好きずきで，このように考えるのもよいだろう．今度，友達と会ったときの，話の種として登録しておこう，と軽い気持ちで読みながしていた．

来年から幼稚園に入る娘に,『鳥類の図鑑』(小学館) を買ってやった．何の気なしに，ぺらぺらとページをめくっていると,「たまごのいろいろ」という欄があった．ここには卵の形，大きさについての解説があり，形については,『卵の実験』に書かれてある説明と全く同じ説明であった．否，むしろ積極的に肯定する立場であった．

子供に嘘をつけるはずがない．卵は，転がっていってしまわないように形造られているのだ．

『卵の実験』と『鳥類の図鑑』の2冊の本に刺激されて，私は，卵の形について研究する羽目になった．

卵はなぜ円弧を描いて止まるのか．卵は縦にするより，横にする方がなぜ安定なのか．卵の黄身は球形であるのに，白身ができ殻ができるころには，どうして卵型になってしまうのか．それも，産み落とす瞬間ではなく，ずっと前に形づくられるのはなぜか．海ガメの卵は円型で，にわとりの卵はなぜ卵型なのか．

調べれば調べるほど，不思議なことばかり．私は，卵の神秘の完全な虜になってしまった．終いには,「卵は卵型でなければならない」と断言したくなってしまった．

神は混沌たる地球から人間を造り給うた，と言えば，人は笑うかも知れない．しかし，何千万年，何億年もかかって造りあげられた卵の形を見るとき，自然の摂理に驚かざるを得ない．だから，やはり，神は自然を造り給うたのだ．

2. 卵はなぜ止まるのか

傾斜地に産み落とされた卵は，どんな方向に転がりだしても，必ず止まってしまう．この理由について，考えてみよう．

卵は，大体，図1のような形をしている．楕円の長軸の一端を丸く，一端を尖らせた形である．この卵が転がるときは，尖端を内側にし，円弧を描きながら回転し，長軸の方向が傾斜の方向と一致する角度で止まる.(図2)

この原理は，少し考えればすぐ解る．

卵を静止させた状態は図3である．卵は点 P で地面に接しているとする．卵の受ける力は，重心 O から下向きに重力 W，接点 P から上向きに抗力 N の二つである．重力 W と抗力 N は，同一直線上にあり，向きが正反対で，大きさが等しい．この静止状態では，長軸 AB は地面と平行ではなく，角度 α の傾きを持っている．長軸 AB が地面と交わる点を S とすれば,

$$\mathrm{SP} = \frac{\mathrm{OP}}{\tan \alpha} \tag{1}$$

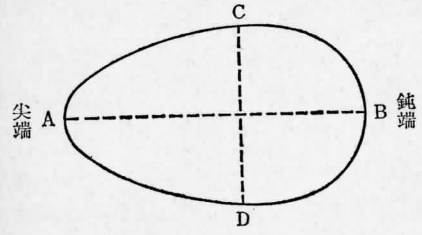
となる．この距離 SP が，卵が転がる円弧の半径になっている．接点 P から長軸 AB に垂直に線を引き，卵のもう一方の端との交点を P′ とすれば

$$\mathrm{SP} = \mathrm{SP'} \tag{2}$$

となる．ここで卵を除いて，S と P と P′ の関係だけを考えてみると，卵の転がりは，頂点を S とする円錐の転がりに置き換えられる．(図 4) 円錐は，頂点から底面の円周までの距離が一定であるから，円弧を描いて回転することになる．(図 5) だから，必ずある位置で静止するのである．

3. 縦と横ではどちらが安定か

卵が転がりだす最初の状態を，図3では，横むきにし



AB：長軸
CD：短軸

図 1

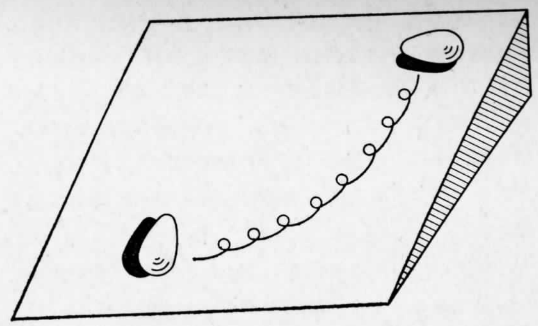


図 2

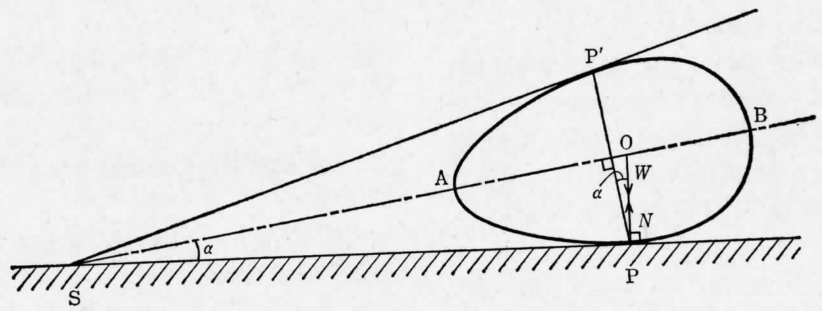


図 3

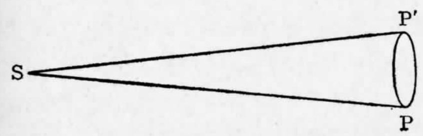


図 4

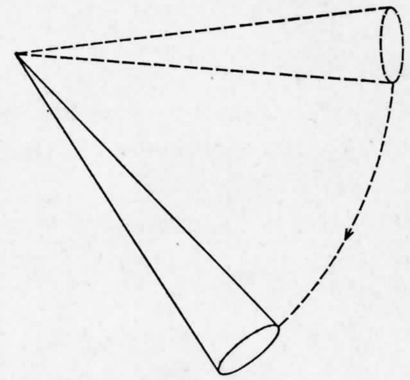


図 5

た．これは，無雑作で，理由をつけ加えておかねばならない．卵型は，作図が難しいので，楕円で代用する．

剛体が静止する条件は，剛体の重力 W と地面からの抗力 N が，同一直線上にあり，大きさが等しく，向きが正反対となることであった．この条件を満たすのは，卵を横向きにした場合（図 6）だけでなく，縦向きにした場合（図 8）もある．実際に，卵を立てて遊ぶこともある．

ところが，縦向きを考慮しなかったのは，不安定であるからである．では，縦向きがなぜ不安定なのであろうか．それは，次の曲率円の考えを導入すれば，容易に理解できる．卵は点 P で地面に接しているが，同じく点 P で卵に接する円を考える．これを，曲率円とよんでいる．曲率円の中心を曲率中心，半径を曲率半径とよぶ．これらは，曲線とともに変化する．

卵の横向き，縦向きの場合のそれぞれに，曲率円を図示してみると（図 6,8），横向きの場合の曲率円の半径が大きいことがわかる．卵の重心 O の位置と曲率中心 Q の位置を比較すれば，横向きの場合は，Q は O より上に，縦向きの場合は，Q は O の下になっている．この位置関係は重要である．

卵を静止位置から，少し傾けてみる．（図 7,9） そして，手を離したとき，横向きの場合は，元に戻ろうとするが，縦向きの場合は，さらに傾いて倒れてしまう．だから，縦向きは不安定である．

4. 曲率円について

卵が安定か不安定かは，その点での曲率円に深く関係していた．ここでは，その曲率円について，数式を用いて説明しておこう．

任意の閉曲線が，θ を媒介変数として

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\theta) \\ y &= g(\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

で表わされるとする．この曲線上の点 $P(x, y)$ での曲率円を考えよう．この円は，中心が $Q(a, b)$ で，半径が r であるとすると，

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \qquad (4)$$

となる．閉曲線と曲率円は，普通，2 次導関数までその値が等しいとされている．(4) を θ に関して微分すれば，

$$(x-a)x'+(y-b)y' = 0 \qquad (5)$$

となる．(5) をさらに θ に関して微分すれば，

$$(x')^2+(x-a)x''+(y')^2+(y-b)y'' = 0 \qquad (6)$$

となる．(4), (5), (6) から a, b, r を求めれば，

$$a = x+\frac{y'\{(x')^2+(y')^2\}}{x''y'-x'y''} \qquad (7)$$

$$b = y+\frac{x'\{(x')^2+(y')^2\}}{x'y''-x''y'} \qquad (8)$$

$$r = \frac{\{(x')^2+(y')^2\}^{3/2}}{x'y''-x''y'} \qquad (9)$$

となる．(3) において，$x=\theta, y=g(x)$ として，y を x の関数としたときは，(7), (8), (9) はもっと簡単な式になる．すなわち

$$a = x-\frac{y'\{1+(y')^2\}}{y''} \qquad (10)$$

$$b = y+\frac{1+(y')^2}{y''} \qquad (11)$$

$$r = \frac{\{1+(y')^2\}^{3/2}}{y''} \qquad (12)$$

である．これは，よく微積分の本に見られる式である．

式 (7), (8) から求めた，曲率中心の軌跡を図 11 に示す．

この軌跡を縮閉線，元の曲線を伸開線と呼ぶこともある．

式 (9) から求めた，曲率円の半径を図 12 に示す．半径は，連続的に変化しているが，$\theta = 0, \pi$ のとき一番小さく，$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ のとき一番大きいことがわかる．

5. 卵形線を求める

曲率円の説明に際し，卵の形として楕円を用いた．それは，卵型は作図が困難であるからであった．

自然界に存在する物の形は，コンパスや定規で作図できたり，簡単な数式で表現できるということは，まずない．ところが，卵形線についての説明は，式 (3) のような一般的な説明しかない．教科書の中だけの話なら，これでよいだろう．しかし，現実問題として，数式でどうしても表現しなければならないことが往々にしてある．例えば，卵と同じ形で，何倍かしたものがほしいとか，卵の各点で曲率半径がどのように変化しているのかを知りたいとか．

卵形線などの一般の曲線に，どのような数式をあてはめるのか．よく用いられる方法について述べてみよう．

卵は軸対称であるから，その半分の曲線を求めてみよう．曲線は無限の連続な点で構成されているが，いくつかの代表点を選び出す．（図 13） 従来，作図する場合に，雲形定規（図 14）なんかを使って，この代表点にあてがって，なめらかに線を引いた経験もあるだろう．この定規は，曲率半径が連続的に変化するようにつくっ

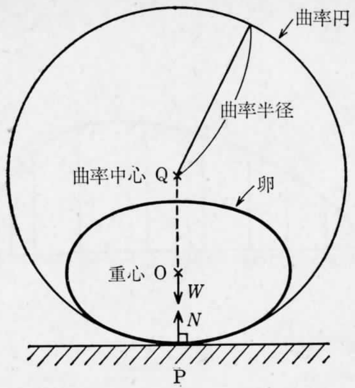


図 6

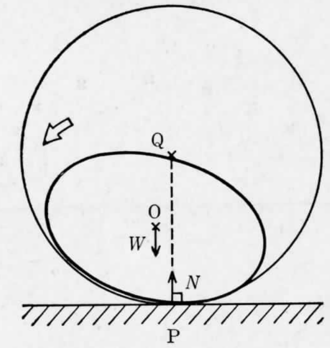


図 7

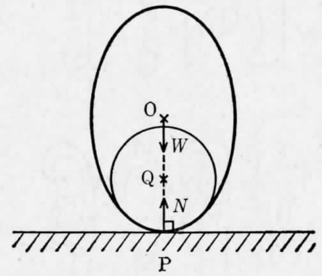


図 8

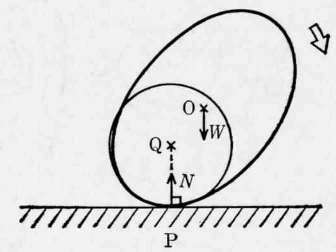


図 9

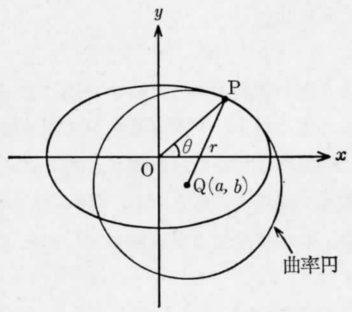


図 10 曲率円

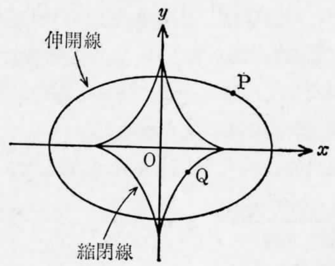


図 11 曲率中心の軌跡

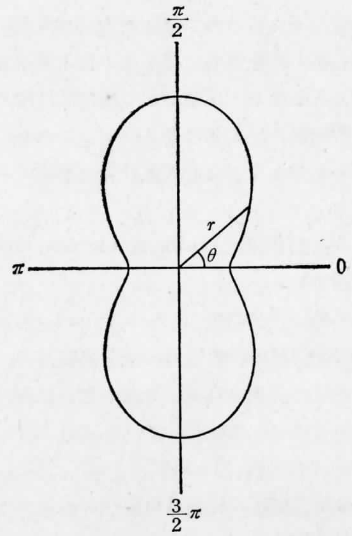


図 12 曲率半径

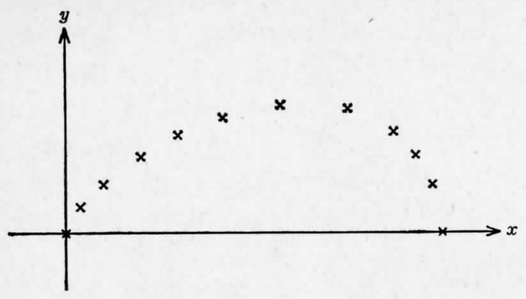


図 13 代表点

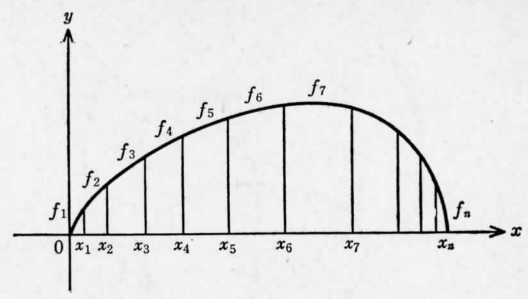


図 15 雲形関数

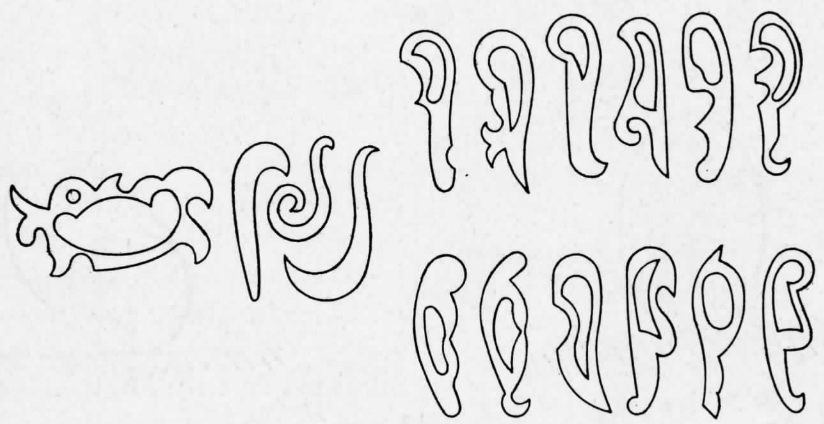


図 14 雲形定規 『図学の理論と実際』(コロナ社) p. 9 より

てある．しかし，私にはこの便利な道具も，非常に使いずらかったように思う．なにしろ，あてはまる曲線を探すのが大変だったし，あてはめた曲線にも深い根拠がなかったからだ．すなわち，描く人の個人差がでるのだ．

現実にある曲線を，正確にかつ論理的に求めるには，もはや雲形定規の出る幕はなくなりつつある．ここに，コンピュータでよく用いる数値計算の手法の一つを紹介しておこう．

それは3次雲型関数 (cubic spline function) による近似の手法である．

いま，n 個の代表点を $\{(x_i, y_i); i=1, \cdots, n\}$ で表わす．3次雲型関数は，代表点の部分区間毎の，3次多項式の結合として表現される．すなわち，区間 $(x_{i-1}, x_i]$ には3次多項式 f_i が対応している（図 15）

$$f_i = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \tag{13}$$

当てはめの接近度は，代表点の値 y_i に対する標準偏差 dy_i として制御する．

n 個の区間に，n 個の3次多項式を仮定した．各3次多項式には4個の係数があり，全体を通じて $4n$ 個の係数を求めることになる．3次多項式が区間の接続点で，なめらかにつながっていなければならない．それを，2次の導関数まで連続であるとする．（図 16） x_i を接続点とすれば，この点でつながる関数は f_i と f_{i+1} であるから，

$$f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i) \tag{14}$$

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) \tag{15}$$

$$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i) \tag{16}$$

となる．この関係は，各接続点についてなりたつから，$3n$ 個の関係式が求まる．$4n$ 個の未知数に対して，$3n$ 個の方程式では，解は一意に決まらない．そこで，次の最適問題が解かれることになる．

代表点 $\{(x_i, y_i); i=1, \cdots, n\}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i(x_i)-y_i}{dy_i}\right)^2 \leqq n \tag{17}$$

なる条件のもとに

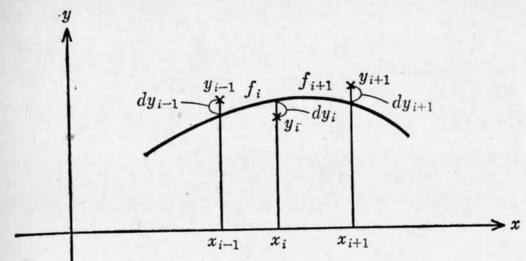


図 16

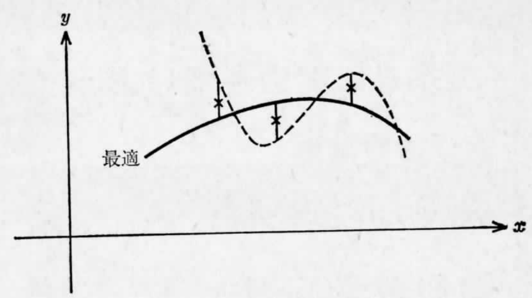


図 17

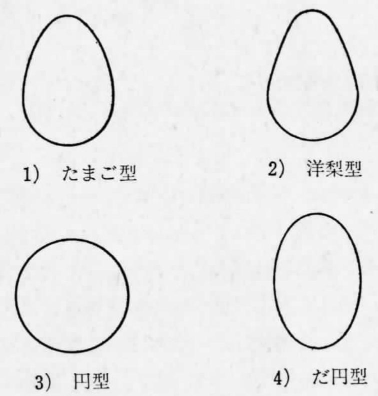


図 18 たまごのいろいろ
『鳥類の図鑑』(小学館) p. 158 より

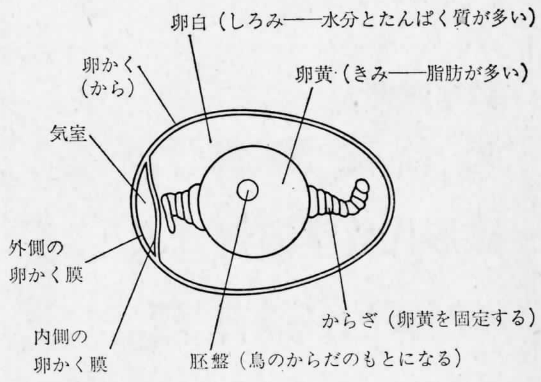


図 19 卵の構造
『鳥類の図鑑』 p. 160 より

$$\int \{f_i''(x)\}^2 dx \tag{18}$$

を最小にするように決定する．(17) 式は，代表点からの接近度を制御している．(18) 式は，次のように考えられる．(12) 式で求めた曲率半径で $(y')^2 \fallingdotseq 0$ を仮定すれば，

$$r = \frac{1}{y''} \tag{12$'$}$$

となる．曲率半径の逆数は，曲率 ρ であるから，結局，(18) 式は

$$\int \rho^2 dx \tag{19}$$

を最小にするように解いていることになる．(17) 式だけを満たしても曲線は定まらない．その関係を図 17 に示す．点線で示した曲線よりも，実線で示した曲線の方がよりなめらかである．

これは，棒などを曲げた際，棒の中にたまる内部エネルギーの問題として論じられる．見た目に自然な曲線ほど，その内部にはエネルギーはたまっていないことになる．

(18) 式の最小値問題は，ラグランジュ乗数法を用いて解かれる．その詳細は，ここでは述べない．

6. ダーウィンと進化論

卵は全部「卵型」とは限らない．卵の形を分類すれば，大体四種類になる．（図 18） ニワトリの卵がたまご型に類する．ウミガラスやウミスズメの卵は，洋梨型で，尖端と鈍端の差が大きい．せまい岩棚の産卵場ではこの方が有利である．同じ絶壁に巣をつくる他の海鳥のカモメやカツオドリの卵は，そうなっていないために，卵を落とさないようおさめておく巣をつくらなければならない．フクロウやオオハシの卵は円型に近い．親鳥の腰骨が短いからである．海ガメの卵も円型である．ダチョウの卵はだ円型に近い．親鳥の腰骨が長いからである．

この分類でいくと，転がってしまわない卵は，たまご型と洋梨型の卵である．卵の構造を図 19 に示す．ここ

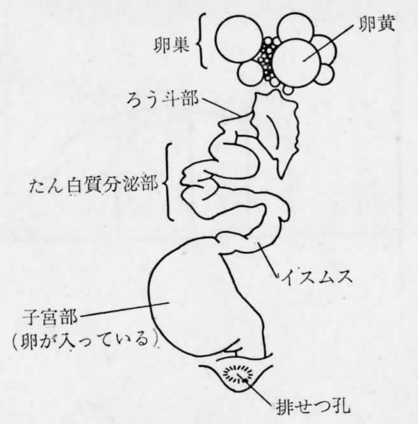


図 20　卵巣と輪卵管
斎藤昌蔵『にわとりと卵』(同和春秋社) p. 141 より

で不思議なのは，卵黄が球形に近いことである．かしわ屋の店頭に，俗称「玉ひも」として売られている，にわとりの卵巣と輪卵管をご存じであろうか．(図 20)　にわとりは，卵巣に大小さまざまの卵黄をもっている．充分に大きくなった卵黄は，ろう斗部から輸卵管に入り，たん白質の分泌を受けながら，卵白，および卵かくを形成していく．卵かくの形が決まるのは，排せつされる瞬間に決まるのではなく，輪卵管を通る間に，少しずつ決まっているのである．

卵の形は，まさに自然環境との適応において決定されているといってよい．これは，ダーウィンの自然選択説に有利な材料であろう．ニワトリと卵は，どちらが先に現われたのか．この疑問に対して，神が自然を創造したとする学説では，説明がつけられなかった．ダーウィンは『種の起原』で，進化の問題として解明した．生物は，最初から，現在ある姿で与えられたのではなく，長い進化の過程であるのだ．

岩棚に産み落とされた卵も，円型であれば転がり，割れてしまい，その種は滅びたのであろう．わずか，数十センチメートルの輪卵管であるが，この距離には，始祖鳥以来の進化の歴史が集約されているのだろう．

(にしやまゆたか／日本アイ・ビー・エム)