理論と現実
積み木問題に寄せて

西山 豊

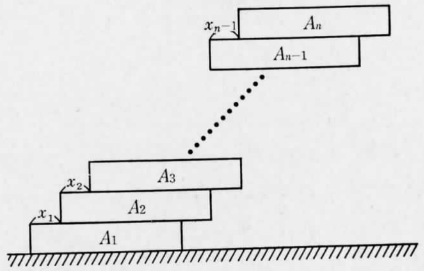

図1

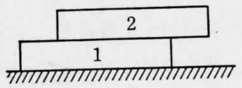
図2

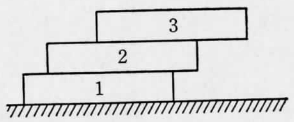
図3

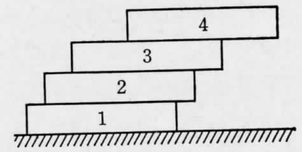
図4

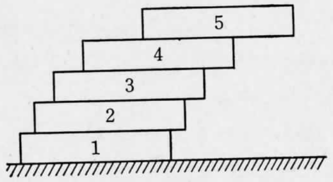
図5

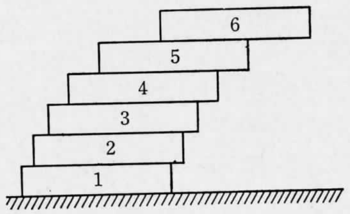
図6

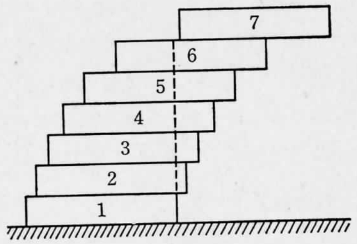
図7

本誌7月号の表紙に，「ある積み木」と題する興味ある問題がのせられてありました．それを再録すると次のようになります．図1に示すように，n 個の積み木 $A_1 \sim A_n$ があるとき，少しずつずらしながら積んでいったとき，そのずれの総和をどれほど大きくできるのでしょうか．

この解は，n 個の積み木がすべて均一なものであるとすれば，ずれを

$$x_k=\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{1}{n-k}\qquad(k=1,\cdots,n-1)\tag{1}$$

のように積んでいけば，その総和は

$$x=\sum_{k=1}^{n-1}x_k=\frac{n-1}{2n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\tag{2}$$

となるというのです．なぜこうなるのかは7月号に説明されてあります．

一見したところ，ずれは $\frac{1}{2}$ より大きくできないような気がしますが，それができるというのが面白いところです．

さらに，この級数は調和級数とよばれ，$n\to\infty$ のとき，$+\infty$ に発散することが知られています．つまり，積み木を無制限に使えるなら，いくらでもずらすことができるというのです．

早速，積み木で実験してみました．

計算式によれば，ずれの大きさを1にするには，7個あれば充分です．すなわち，

$$\begin{aligned}x&=\sum_{k=1}^{7-1}x_k\\&=\frac{7-1}{2\times7}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{7-1}\right)=1.05\end{aligned}\tag{3}$$

(1) 式にしたがって積みあげた例を図2から図7に示します．

さて，ここからが問題です．ずれの大きさを2にすることに挑戦してみました．結果はだめでした．計算式によれば，積み木は 35 個あれば充分です．すなわち，

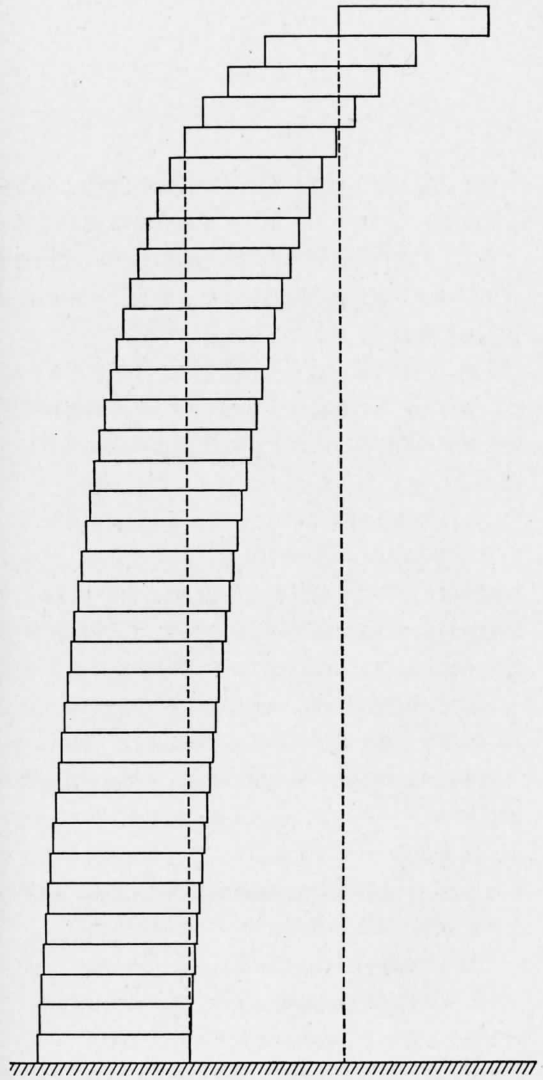
図8

$$\begin{aligned}x&=\sum_{k=1}^{35-1}x_k\\&=\frac{35-1}{2\times35}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{35-1}\right)\\&=2.00027\end{aligned}\tag{4}$$

実際に積みあげられなかったので，作図だけを図8に示しておきます．このように積めば可能なのでしょうが，普通の大きさの積み木では多分不可能でしょう．

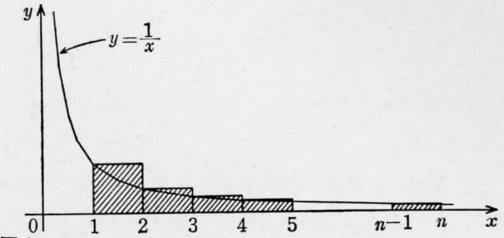

図9

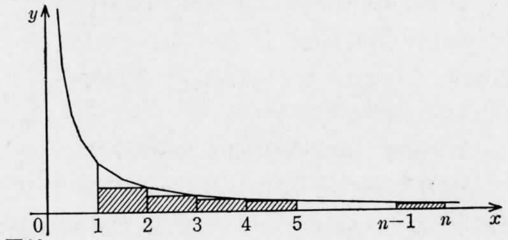
図10

ずれの大きさを3にするには，積み木はなんと 233 個いることになります．理論上，無限大に発散するはずの積み木も2の時点でつまづいてしまいました．

これは，調和級数の大きくなる速度に深く関係しているようです．図9から，

$$\int_1^n\frac{dx}{x}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\tag{5}$$

の関係が，図 10 から，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{dx}{x}\tag{6}$$

の関係がなりたちます．(5), (6) から

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{2n}\log n&<\frac{n-1}{2n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\\&<\frac{n-1}{2n}\left(\log n+1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

となり，この式において $n\to\infty$ とすれば，ずれの総和 x は

$$\frac{1}{2}\log n<x<\frac{1}{2}(\log n+1)\tag{8}$$

となります．つまり x は，$\log n$ のオーダーで無限大に発散するという，きわめて遅い級数であるということになります．

理論上発散するということと，現実に発散するということとのずれはかなり大きいと感じました．

（にしやま ゆたか／日本アイ・ビー・エム）