多角形の面積

西山 豊

●10 分間トレーニング

こんな問題はいかがでしょうか.

任意の多角形があります.「任意の」とは,頂点の数が三つ以上ならいくつあってもかまわず,形も,凸多角形だけでなく凹多角形を含むことを意味します.

いま,この多角形の頂点の数 n と各頂点の xy 座標とが分っているとします.

$\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$, ……, $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$

このとき,多角形の面積を求めて下さい.方法は,どんな方法でもいいです.ただし,簡単に,迅く,正確に求めて下さい.できれば,「任意の」多角形に通用するアルゴリズムを完成させて下さい.

たとえば,図1に示した,頂点の数が8個の凹多角形ではどうなるでしょうか.

●小学生なら(方法 1)

もっとも初歩的な求め方はこうなるでしょう.

「四角形・五角形・六角形などの面積は,それをいくつかの三角形に分けて求めることができる」(『改訂算数5年下』啓林館 p. 34)

と,教科書にあるとおり,8角形を6個の三角形に分けます.(図 2) そして,分けた三角形の面積は,公式

三角形の面積 = 底辺×高さ÷2 (1)

で求め,各々の面積を合計します.三角形の高さを示す線分は二つの三角定規でうまく引けるでしょう.

底辺と高さは,ものさしで測って求めます.その値は,多分,きっちりした数値ではなく,小数点を含んだ値になるでしょう.でも,小数点の含んだ掛け算,たし算はできますから,これができれば,小学生にとっては合格です.

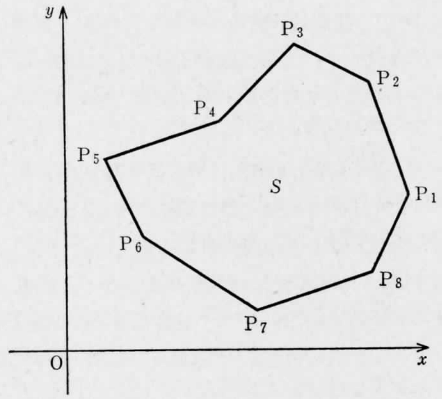


図 1

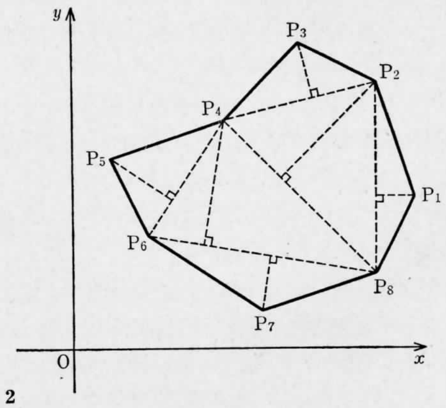


図 2

●中学生なら(方法 2)

もう少し上級生になると,次のような求め方をするかも知れません.中学生になるとグラフ用紙を使った問題が増えてきます.直交座標についての知識がついてきますから,図3に示すように,x 軸,y 軸に沿って補助線を引きます.

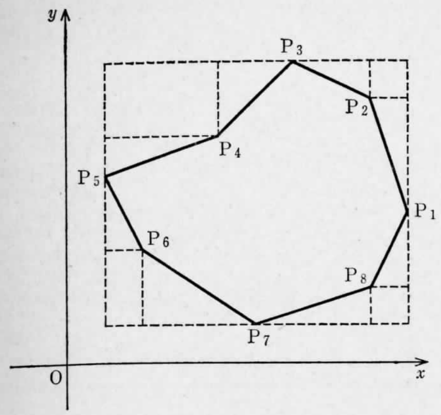


図 3

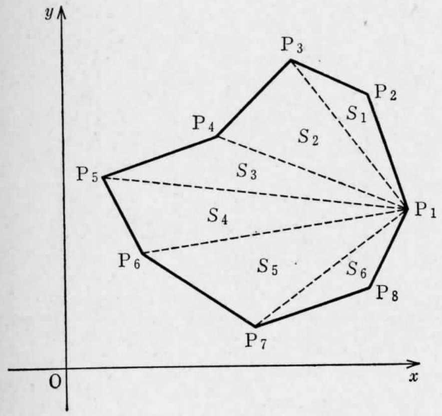


図 4

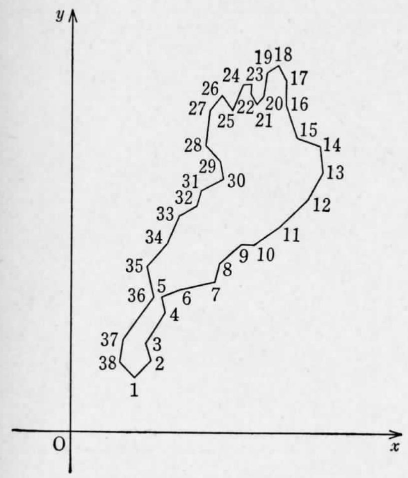


図 5

この図から,一見して分るように,多角形の面積は,一番外の長方形の面積から,8個の三角形と,4個の長方形の面積を引くことによって求められます.

この方法では,ものさしで長さを測る必要はありません.頂点の座標から簡単に求められます.

●高校生なら(方法 3)

いままでの方法には,任意の多角形の「任意の」に対する一般性の考えが入っていません.その都度,補助線を引いてみる必要があります.

そこで,解法のアルゴリズムに一般性をもたせてみましょう.頂点 P_1 を始点にして,頂点 P_3 から頂点 P_7 まで次々に補助線を引き,6個の三角形 S_1~S_6 に分割します.(図 4)

一般に,凸 n 多角形は,$n-2$ 個の三角形に分割されます.

さて,三角形の面積を求めるには,習ったばかりのヘロンの公式を使うでしょう.つまり,三角形の三辺の長さを,a, b, c とすると,面積 S は,

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2}$$

$$\text{ただし } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

(『高等学校数学 I 』数研出版 p. 200)

となります.辺の長さは,ものさしで測ったりせずに,ピタゴラスの定理を使って求めます.すなわち,頂点 $\mathrm{P}_i(x_i, y_i)$ と頂点 $\mathrm{P}_j(x_j, y_j)$ との距離 $\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}$ は,

$$\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j} = \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2} \tag{3}$$

となります.

この方法は,n 多角形に対する一般性をもたせる点で有力です.図をいちいち描いてみる必要もありません.ただ,凹多角形については成り立たないこと,また,計算に根号が出てきたりして少々やっかいです.

●エレガントな解法とは(方法 4)

いままで,3つの方法について述べてまいりましたが,『数学セミナー』愛読者の皆さんには,これで満足していただけるわけではありません.もっと簡単に,迅く,正確に求める方法はないのでしょうか.

それがあるのです.

これから紹介します方法でいきますと,図5に示した複雑な地形の面積も,たちどころに求まってしまうのです.

頂点の数が 38 の凹多角形の面積.今までの3つの方法では,もはやたちうちできないのは明らかです.

原理は，簡単です．

各頂点から x 軸に垂線を下ろし，その足を H_1～H_8 とします．(図 6) となりあわせる頂点と垂線で台形ができます．たとえば，頂点 P_1, P_2 と垂線 H_1, H_2 とでは，上底 P_1H_1，下底 P_2H_2，高さ H_1H_2 とする台形 $P_1H_1P_2H_2$ ができます．これらの台形は横向きになっています．

台形は全部で 8 個できます．つまり，頂点の数だけできます．頂点 P_1 から頂点 P_5 までと，頂点 P_5 から頂点 P_1 までを分けて図示します．(図 7) 図からわかるように，多角形の面積 S は，

$$S=(S_1+S_2+S_3+S_4)-(S_5+S_6+S_7+S_8) \tag{4}$$

で求められます．一つずつの台形の面積は，

$$\text{台形の面積}=(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高さ}\div 2 \tag{5}$$

で求められます．面積 S_1～S_8 を座標値で表わしてみましょう．

$$\left.\begin{aligned}S_1&=(y_1+y_2)\times(x_1-x_2)\div 2\\S_2&=(y_2+y_3)\times(x_2-x_3)\div 2\\S_3&=(y_3+y_4)\times(x_3-x_4)\div 2\\S_4&=(y_4+y_5)\times(x_4-x_5)\div 2\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

上底 下底　高さ

$$\left.\begin{aligned}S_5&=(y_5+y_6)\times(x_6-x_5)\div 2\\S_6&=(y_6+y_7)\times(x_7-x_6)\div 2\\S_7&=(y_7+y_8)\times(x_8-x_7)\div 2\\S_8&=(y_8+y_1)\times(x_1-x_8)\div 2\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

上底 下底　高さ

(6), (7) を (4) に代入して整理すると，次のようになります．

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{2}\{&(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)\\&+(y_3+y_4)(x_3-x_4)+(y_4+y_5)(x_4-x_5)\\&+(y_5+y_6)(x_5-x_6)+(y_6+y_7)(x_6-x_7)\\&+(y_7+y_8)(x_7-x_8)+(y_8+y_1)(x_8-x_1)\}\end{aligned} \tag{8}$$

この式で，右辺の各項が和の形で表わせるのは，高さが符号つきで表わせるからです．つまり，S_1 から S_4 までは高さが正で，S_5 から S_8 までは高さが負になり，面積もそれぞれ正，負となります．

一般に，n 多角形の面積は，

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{2}\{&(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)\\&+\cdots\cdots+(y_n+y_1)(x_n-x_1)\}\end{aligned} \tag{9}$$

となります．式の形が整っているため，面積を求めるプ

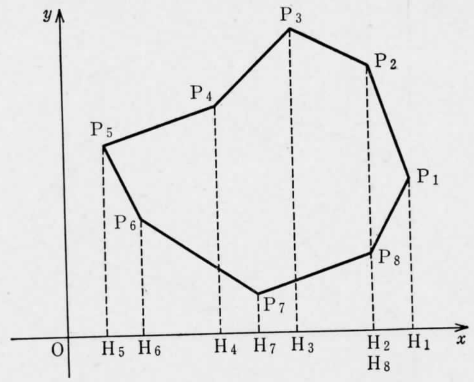


図 6

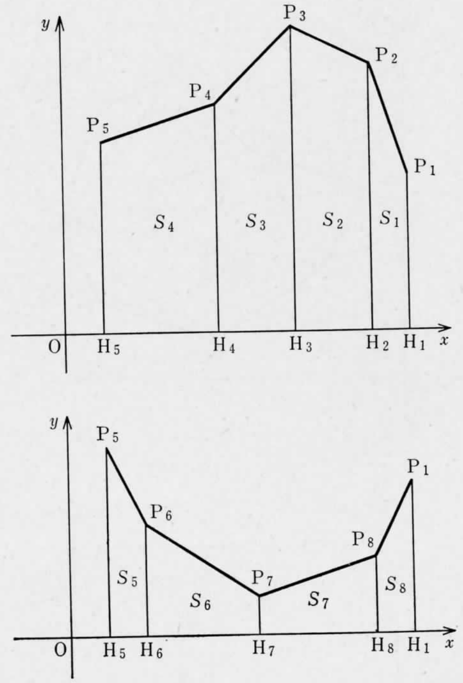


図 7

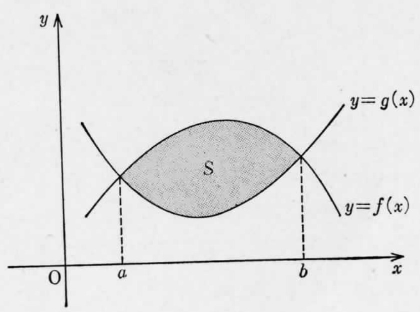


図 8

(頂点の数と頂点の座標を入力します)

```
   DIMENSION X(100),Y(100)
   READ(5,*) N
   DO 10 I=1,N
   READ(5,*) X(I),Y(I)
10 CONTINUE
   WRITE(6,1) (I,X(I),Y(I),I=1,N)
 1 FORMAT(1H ,'P',I2,2X,'(',F5.1,' ,',F5.1,' )')
   CALL MENSEK(X,Y,N,S)
   WRITE(6,2) S
 2 FORMAT(1H0,'MENSEKI=',F10.2)
   STOP
   END
```

(面積を求めるサブルーチン)

```
   SUBROUTINE MENSEK(X,Y,N,S)
   DIMENSION X(N),Y(N)
   S=0.0
   N1=N-1
   DO 10 I=1,N1
   S=S+(Y(I)+Y(I+1))*(X(I)-X(I+1))
10 CONTINUE
   S=S+(Y(N)+Y(1))*(X(N)-X(1))
   S=S/2.0
   RETURN
   END
```

表 1

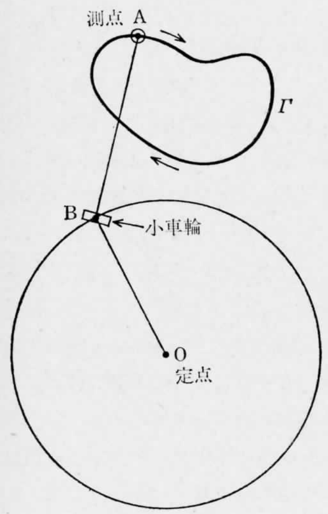


図 9

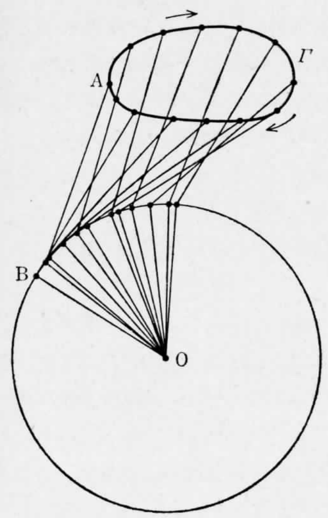


図 10

ログラムも非常に簡単になります．(表 1)

●面積と積分

積分を習いはじめたころ，次のような公式を教わったと思います．

二つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれる面積は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx \tag{10}$$

で求まります．(図 8)

多角形の面積を求める場合は，式 (10) を

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx \tag{11}$$

と分解し，各々の積分を台形公式で求めたことになります．

●面積計

地図の面積を測ったりする場合は，多角形の面積を求めるほど単純ではありません．地形が折れ線で表わせることはほとんどなく，曲線で複雑です．折れ線の頂点の数を増やして，曲線に近づけるという方法もありますが，あまり現実的ではありません．

よく用いられる方法としては，地図に方眼紙を重ね合わせて，方眼の数を数えて求める方法があります．また，均一な材質の紙で，地形を切りとり，その重さを天びんで測って，面積を求める方法もあります．

しかし，もっと便利な方法について紹介しましょう．それは，面積計（プラニメーターといいます）を用いて求める方法です．この測定器は，今でも設計事務所なんかではよく使われています．

プラニメーターは，1856 年スイス人アムスラーによって考案されたもので，その仕組みには，完全な数学上

の裏づけがあります．

プラニメーターの基本的な構成を図9に示します．B点で自由に回転できるように棹 BA と棹 BO がとりつけられています．測りたい面積の閉曲線を Γ とするとき，その曲線の外に定点 O を固定します．そして，A点を Γ に沿って，時計まわりに一周したとき，B点にとりつけられた小車輪の回転数を読みとり，棹の長さ AB を掛けあわせれば面積が求まるのです．

求めたい閉曲線上を一周すれば，即，面積が求まるというのは，多角形の面積を求めた方法4に似ています．

その様子を図10に示します．A点が Γ 上を一周するとき，棹 AB が通過する面積を差し引きすれば，求まることになります．すなわち，線積分をしていることになります．

●プラニメーターの原理

この測定器は少し面白いので，その原理について簡単に触れておきましょう．測点 A が A′ まで動くとき，B は B′ まで動くとします．一般に，AA′ の移動は，平行移動 $\overline{AA''}$ と回転移動 $\widehat{A''A'}$ に分けられます．棹 AB の長さを l，平行移動量を ds，回転移動量を $d\theta$ とすれば，棹 AB の移動によって覆われる面積 dA は，

$$dA = l\,ds + l^2 d\theta/2 \tag{12}$$

となります．

B にとりつけた小車輪の回転量を dn とすれば，

$$dn = ds \tag{13}$$

となり，(13) を (12) に代入して

$$dA = l\,dn + l^2 d\theta/2 \tag{14}$$

となります．ここで，(13) 式について，少し説明を加えておきます．図11に示したのは，∠ABO と小車輪の関係です．小車輪の回転する方向が，棹 AB の進む方向となす角度を α とすれば，回転量 dn は

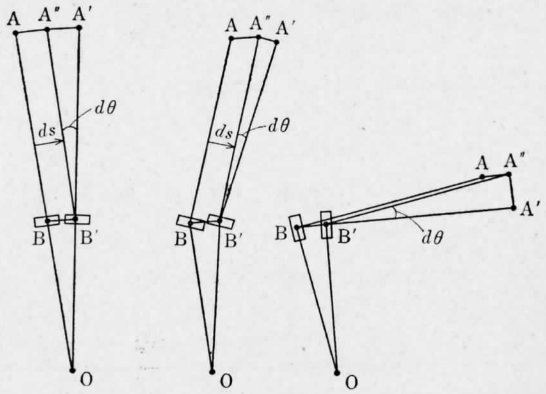
$$dn = \widehat{BB'}\cos\alpha \tag{15}$$

の関係があります．すなわち，(1) の場合は $\alpha = 0°$ ですから，小車輪は完全に回転し，(3) の場合は $\alpha = 90°$ ですから，小車輪はまったく回転しません．(2) の場合は，(1) と (3) の中間の場合で，小車輪は，すべりながら回転します．すなわち，$\cos\alpha$ 分だけ回転します．

さて，面積は，閉曲線一周分についてですから，(14) 式を積分して，

$$S = \int dA = \int l\,dn + \int \frac{l^2}{2} d\theta$$
$$= ln \tag{16}$$

となります．n は全体を通じての回転数です．また，回



(1)　(2)　(3)

図 11

転移動 $d\theta$ に関する積分は一周で0になりますから，

$$\int d\theta = 0$$

で，第2項は消えることになります．

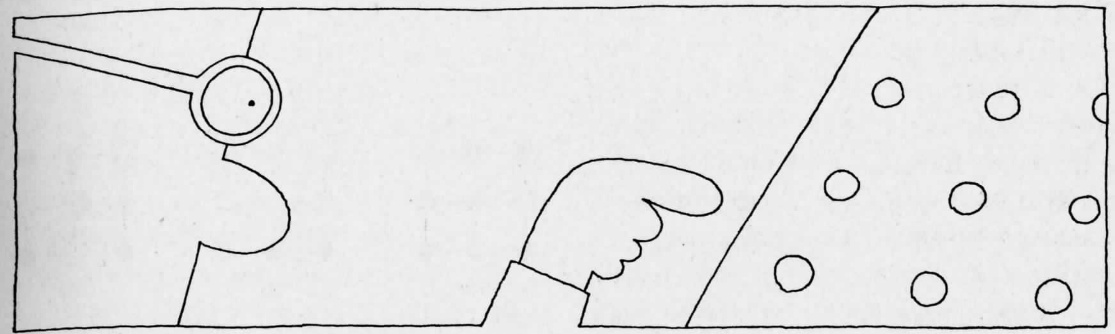
このようにして，小車輪の回転数は面積に比例していることになるのです．

●結び

面積を求める方法は，これ以外にもあるでしょう．肝心なのは，もっとも適した方法を見つけることではないでしょうか．何でも公式にあてはめて，強引に解いてしまおうとするのは悪い癖です．多角形の面積を求める際に用いた方法3はその典型といえるでしょう．私も，受験の弊害を受けているせいか，ヘロンの公式で甘んじるところでした．公式を知っているがために，問題をより複雑にしてしまうところでした．問題をさまざまな角度から捕えなおし，その中で一番よい方法を見つけようとする態度は，常に持ちつづけたいものです．

（にしやま ゆたか／日本アイ・ビー・エム）

格子上の点滅反転遊び　SYSTEM 5



●MERLIM の点滅反転遊び

最近見かけた電子遊具 MERLIM（日本製は DR. SMITH）の遊び方5番に 'MAGIC SQUARE' というのがある．これは，ランプ（発光ダイオード）の仕込まれた押スイッチが，0番から10番まで11個，申の字型に配されているうちの，1番から9番まで，図1のような 3×3 の格子の部分を使って，次のような規則で遊ぶのである．この遊びの各場面で，いくつかのランプは消えており（以下○で表す），他のランプは次の手を催促するかのように一斉にチカチカと点滅する（以下●で表す）．

a. この遊びの目標は，図2のように真中の5番を除いた8頂点を●にすることである．それができたとき MERLIM は「ピロリムピロリムピロリム」というような電子音を発して '成功' をつげる．

b. この遊びに入ったとき，MERLIM は9頂点の●○を不定に生成して寄越す——例えば図3.

c. 隅のスイッチを押すと，その隅を含む小正方形の4頂点で，それぞれ●○が反転する——例えば図3で3番を押すと図4の場面になる．

d. 辺の中点のスイッチを押すと，その辺の3頂点でそれぞれ●○が反転する——例えば図4で4番を押すと図5のようになる．

e. 真中の5番を押すと，それ自身およびそれと格子線で上下左右に隣合っているもの計5頂点のそれぞれで●○が反転する——例えば図5の局面からは図6の形が得られる．

各スイッチは，押したとき固有の楽音が鳴る．なかなか成功しなくても，MERLIM が気にするのは電池の消耗だけで，ダメを告げる音は出さないようである．

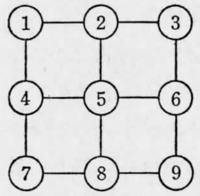


図1

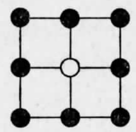


図2

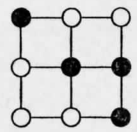


図3

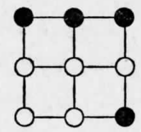


図4

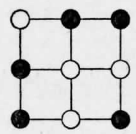


図5

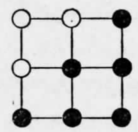


図6

以下では簡単のために，図1の隅の点を**隅**，辺の中点を**中**，真中の点を**央**と呼ぶことにする．

●考え方

この遊び，一体どんな初期状態からでも成功に達する手順があるのだろうか．あまりよく考えずにランプを眺めて，行きあたりばったりに押したのでは，なかなか成功しない．図6は，もうひと押しで成功の場面であるが，そういう場面9通りは，回転や裏返しの同型による分類