三角形の分割

西山 豊

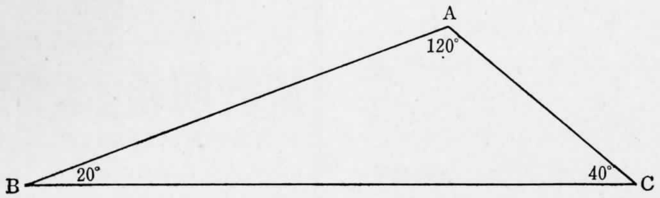

図 1

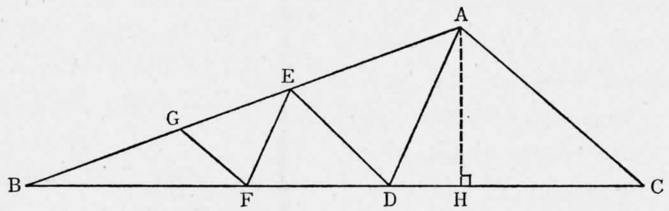

図 2

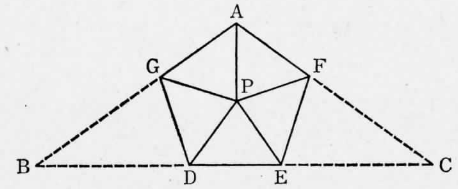

図 3

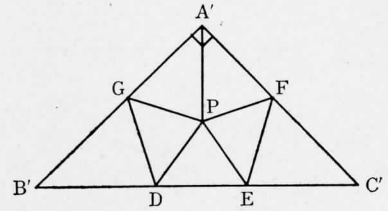

図 4

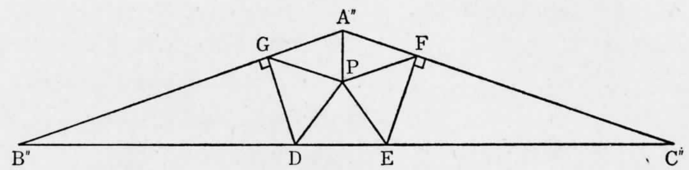

図 5

●解けそうで解けない問題

「ここに，任意の鈍角三角形があります．これを，鋭角三角形で分割してみなさい．分割の方法は，どのようであってもかまいません．ただし，構成する三角形は有限個で，すべて鋭角三角形でなければなりません．直角三角形はだめです．」

この問題を兄から聞いたのは，兄が大学の教養生で，私が高校に入学したばかりの頃だったと思う．兄は，おそらくこの問題を，数学の授業か，または友達から仕入れてきたのだろう．一見やさしそうだが，なかなか解けない．一度，私に試してみようと思ったのであろう．

いま仮に，図1のような鈍角三角形 ABC を考えてみる．角 A が鈍角で 120 度，角 B と角 C はおのおの 20 度と 40 度である．

直角三角形になら，容易に分割できる．図2に示すように，頂点 A から底辺 BC に垂線をおろし，その足を H とすれば，鈍角三角形 ABC は，二つの直角三角形 ABH と AHC に分割されたことになる．

これでは答になっていない．鋭角三角形でなければならないから，AD のように分割する．ところが，三角形 ADC は鋭角三角形になるが，三角形 ABD は鈍角三角形になってしまう．これは大変と，鈍角 D を分割するために，DE のように分割する．しかし，またもや鈍角三角形 EBD が残ってしまう．

鈍角三角形を，AD, DE, EF, FG のように分割していった．確かに，残された鈍角三角形 GBF は，もとの大きさに比べれば小さくなっている．この操作を繰り返せば，おそらく鈍角三角形は，目に見えなくなる大きさになるであろう．しかし，明らかに，鈍角三角形が一つ残っていることになる．これではいけない．

小さい頃から，数学の好きだった私である．この問題を聞くや，なんとか解いてやろうと，まるで何かにとりつかれたかのように，取りくんだものだった．結果は駄目だった．

以来十数年，これは解けないものと諦めていた．この間，正月に帰省した際，行き帰りの電車の中で，暇つぶしに考えてみることにした．解けたのである．

もし，この問題に興味を持たれるなら，私のこの後の説明を読まずに，独自の立場で試みられたい．なぜなら，私の解答は，あまりにも易しく，なんだこんなことか，と思われるに違いないから．そして，私が十五年もかかって解いたという，発見の喜びも味わえないだろうから．

●「できないことの証明」と「できることの証明」

証明といえば，可能であるといった肯定的な証明を思いつくが，不可能であるといった否定的な証明も，数学では同程度に重視されている．

ガロアが，五次以上の代数方程式の一般解は存在しないと証明したのも，オイラーが，「ケーニヒスベルクの橋渡り」の問題に対して，不可能であることを証明したのも，その有名な例である．

鈍角三角形の分割問題も，解を求める前に，できるか，できないかのどちらかを証明しておく必要がある．

図2による方法では，絶対にできないということは，すぐ証明できる．角 A が鈍角であるから，A を分割しなければならない．それはいいだろう．さて，頂点 A から伸びた線分は，対辺 BC 上の一点 D で交わる．ところが，直線は，角度でいえば 180 度であるから，交点 D では必ず2本以上の分岐が必要になる．それは，DA と DE にあたる．三角形 ABC の三辺 AB, BC, CA 上に交点の数がいくつかあったとき，その交点からの分岐が，すべて2本以上であることができるだろうか．それはできない．図2のように，一筆がきのように分割していく限り，最後の点では必ず分岐は1本になってしまうのだ．

鈍角三角形を鋭角三角形に分割できないのだろうか．そのためには，できる条件を整理してみる必要がある．

まず，鈍角 A は分割しなければならない．しかし，線分 AD のような分割ではだめである．対辺上の交点では，2本以上の分岐が必要である．ここまでくると，三角形の内部に点をいくつか設けなければならないことが，推定される．そうした場合，内部の点では，分岐は5本以上でなければならない．なぜなら，内部の点のまわりの角度は，360 度であるからだ．

このような条件を念頭におきながら，ここで発想を逆転させてみる．つまり，鈍角三角形を鋭角三角形に分割するのではなく，鋭角三角形を合成して鈍角三角形がつくれないかを考えてみる．

内部の点では，5本以上の分岐が必要であるから，図3に示すように，内部の点を P とした正五角形 AGDEF を考える．正五角形を構成する5つの三角形は，すべて鋭角三角形であり，5つの頂角は 108 度の鈍角である．この鈍角が使えないのか，ということである．

点線で示すように，辺 AG, DE, AF を延長させ，その交点を B, C とすれば，三角形 ABC は A を頂点，

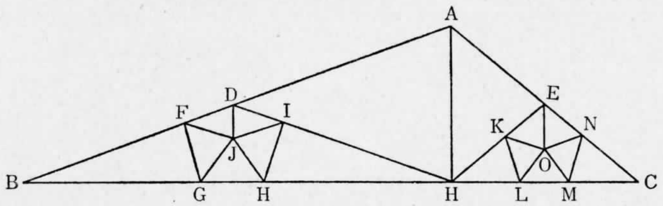

図 6

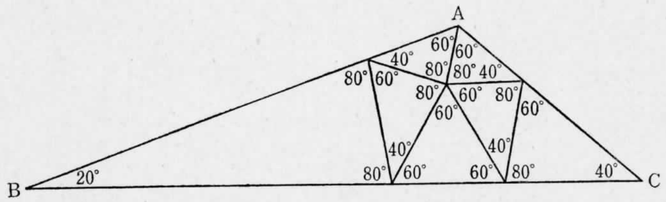

図 7

BC を底辺とした鈍角二等辺三角形であることになる．

鋭角三角形をあわせて，鈍角三角形をつくれたことになる．正五角形をもとにしたことが，その成功の原因になっている．正六角形や，正七角形ではだめである．

●一般性の証明と最適解

ここまでくると，後は易しい．任意の鈍角三角形に対する証明だけだ．

まず，どの程度の角度まで分割できるかを，みてみよう．鈍角は，90 度から 180 度まであるから，そのすべてを満さなければならない．図3のモデルにおいて，内部の点 P と，G, D, E, F を固定にしたまま，A, B, C を動かしてみる．そうすれば，図4の場合の角 A′ は 90 度，図5の場合の角 A″ は 144 度となり，144 度までの鈍角二等辺三角形なら，分割できることになる．

144 度以上はどうかというと，いったん，144 度以内の鈍角三角形にしておけばよい．その方法は，ここでは省略する．

さて，鈍角二等辺三角形ではなくて，任意の鈍角三角形ならどうするのだろうか．それには，図6に示すような手順をおえばよい．頂点 A から垂線 AH をおろし，二つの直角三角形に分割する．つぎに，直角三角形 AHB を，鈍角二等辺三角形 DBH と鋭角三角形 ADH に分割する．あとは図3のモデルと同じである．

これで，任意の鈍角三角形は，鋭角三角形に分割されたことになる．しかし，まてよ．これで甘んじていてはいけないぞ．もっとエレガントな方法があるだろう．

図6に示したのは，一般性に対するこじつけ的な証明のためにこうなってしまったのだ．もっと少ない数で，分割できないだろうか．この方法には，一般性を証明することはできないが，図7に示すような方法もありうる．つまり，図3のモデルをあてはめ，内部の点 P と辺上の交点 G, D, E, F を動かせたのである．

解は無数にある．三角形の内角の和は 180 度である．すべての角は 90 度未満でなければならない．直線は 180 度であり，内部の点のまわりは 360 度であるといった条件をもとに，三角形のバランスを格好よくするように，目的関数を適当に選べば，これは一つの線形計画法の問題になる．

●有限要素法のメッシュ

複雑な形状をした構造物が，荷重に対してどのように変形するかといった問題は，解析的にはほとんど無力であった．それが，有限要素法という工学上の技術と，コンピュータの発達によって，一気に可能になったのである．自動車のボデーや，ガスタンクなどの構造解析によく利用されている．

有限要素法の基礎になるメッシュは，普通，三角形が用いられている．そして，解の精度をあげるために，三角形はなるべく正三角形に近くなるように分割される．

仕事で，三角形に分割する作業をやらされることがある．良い三角形にするため，点を適当に設定して分割していく．そのような中で，ふと，昔から未解決になっていた問題を思い出したのである．何が幸いになるかわからない．

むつかしい幾何学の証明も，一本の補助線を引くことによって，一目にして解決されることがある．今回の分割の問題は，内部に1つの点を設けることによって，一気に解決されたことになる．神の「補助点」といったところか．　（にしやま ゆたか／日本アイ・ビー・エム）

量子論理への誘い

2

直観論理と量子論理

竹内外史

●古典論理・直観論理・量子論理

量子論理の外に，真理値が真と偽との二つに限らない論理に，直観論理があります．直観論理は数学基礎論の真剣な考えに基づいており，論理としてよく研究されており，歴史も深いものです．したがって，量子論理を直観論理と対比することは量子論理を理解するためのうまい方法と思います．

まず直観論理の説明から始めることにします．

直観論理や量子論理と区別するために，われわれが普通に用いる論理を古典論理と呼ぶことにします．古典論理は，どこかに神のような絶対者がいて，すべての命題が真か偽かにハッキリと判定されてしまうという立場に立った論理といってよいと思います．この立場では，排中律 $A\vee\neg A$ は何より明白な真理となります．

ところで直観論理では，われわれ人間の世界と関係のないところにある真理よりは，人間の行動に基づいた真理，人間が真理を探し求める行動に依存する真理こそ，より意味のある真理だと考えます．したがって直観論理では，“A が正しい” ということの意味を “A を確認する方法をもっている” ということだと考えます．このように考えると，排中律の意味は，“A を確認する方法をもっているか，$\neg A$ を確認する方法をもっている” となって，排中律をすべての A に対して認めるということはわれわれ人間がすべての問題を解決する方法をもっているということになって，明白な真理と考えることはできません．直観論理では，この立場に立ってすべての論理演算の意味を考え直し，新しい論理を作り直すのです．最初から明らかなように，$A\vee\neg A$ が正しいとは限らないので，真理値が真と偽の二つだけに限られないことはいうまでもありません．

ここではこのような数学基礎論の立場で直観論理を展開することは誌面の都合上あきらめて，そうしてでき上った直観論理の体系についてだけのべることにします．

●古典論理と集合

まず，説明の都合上，古典論理と集合との関係から始めることにします．

いま一つの集合 X を固定して，その部分集合を $A, B, C, \cdots\cdots$ で表わすことにします．また同時に $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots\cdots$ は論理の命題を表わすことにします．このとき論理演算 $\neg, \wedge, \vee$ と集合についての演算 $-, \cap, \cup$ に，次の対応があることはよく知られていることと思います．

$$\neg\mathfrak{A} \longleftrightarrow X-A$$

$$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \longleftrightarrow A\cap B$$

$$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} \longleftrightarrow A\cup B$$

ここでもちろん $\mathfrak{A}\longleftrightarrow A, \mathfrak{B}\longleftrightarrow B$ という対応の上で考えています．もちろんこの対応は $X-A, A\cap B, A\cup B$ の定義を $\neg, \wedge, \vee$ を用いてすることから来ているのですが，逆にこの対応を用いて論理の tautology（恒に真な論理式）を集合の言葉で表わすことができます．定理の形でこれを表わすと，次の形になります．

定理　命題の変数 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots\cdots$ と $\neg, \wedge, \vee$ からできている命題 $\varphi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots)$ が tautology である必要充分条件は，すべての集合 X とそのすべての部分集合 $A, B, C, \cdots\cdots$ について

$$\varphi'(A, B, C, \cdots)=X$$

となることである．ここに φ' は $\neg, \wedge, \wedge$ を $X-, \cap, \cup$ で変換して得られたものとする．

またさらに $\varphi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \cdots)$ が恒に偽な論理式を表わす必要充分条件は，すべての集合 X とその部分集合 $A, B, C, \cdots\cdots$ について

$$\varphi'(A, B, C, \cdots)=\phi$$

となることである．

さらに φ の外に ψ が同様に与えられていて，

$$\varphi\rightarrow\psi$$

を

$$\neg\varphi\vee\psi$$