## 折紙をそろえる（表紙の解答）　西山 豊

**●簡単な証明**

図4に示したように，2本の点線の交点を回転の中心にとるならば，どうして2枚の折紙がうまく重なるのかを証明しておこう．

説明のために，記号を図5のようにつけておく．下の折紙を正方形 ABCD，上の折紙を正方形 A′B′C′D′ とし，各辺の交点を P, Q, R, S とする．そして直線 PR と直線 QS の交点を O とする．

このように記号をつけると，図6のような位置関係にあるとみて，点線を引きなおして交点 O を求めてみると，これも回転の中心になっていることがわかる．

折紙は正方形だから，4辺は互いに等しい．したがって重ね合わせは4通りあり，回転の中心は4個あることになる．あとの2個の作図は省略する．

さて，図5をながめて，いきなり証明するのは難しい．順を追って説明していこう．

いま，交わる2本の直線 $l_1, l_2$ がある（図7）．この2直線を重ね合わせるためには，回転の中心を，交点 P を通り交角を2等分する線上にもってこなければならない．

交角の2等分線上の任意の点 Q から，直線 $l_1, l_2$ に垂線を下し，R, S とする．三角形 QPR と三角形 QPS は合同な直角三角形となり，したがって QR と QS の長さは等しくなる．

これで，Q を中心に回転すれば直線 $l_1$ と直線 $l_2$ は重ね合わされることになる．

つぎに，図8に示すように，平行な2直線 $l_1, l_2$ に距離の等しい平行な2直線 $l_3, l_4$ が交わっていたとする．

この4直線で囲まれた四辺形 EFGH は，菱形になっている．したがって，その対角線は周辺の角を2等分していることになる．

そこで，この対角線上に任意の点 Q をとるならば，Q を中心にして直線 $l_1, l_2$ を直線 $l_3, l_4$ に重ね合わせることができるのである．

さて，図5に戻ってみよう．

直線 PR は，角 APB′ と角 D′RC を各々2等分している．したがって直線 PR 上に回転の中心を持ってくるならば，辺 A′B′ を辺 AB に，辺 D′C′ を辺 DC に重ね合わせることができる．

同様にして，直線 QS 上に回転の中心を持ってくるならば，辺 B′C′ を辺 BC に，辺 D′A′ を辺 DA に重ね合わせることができる．

4辺は同時に重ならなければならないから，直線 PR と直線 QS の交点 O が唯一の中心になるのである．

［証明終］

（にしやま ゆたか／日本アイ・ビー・エム）

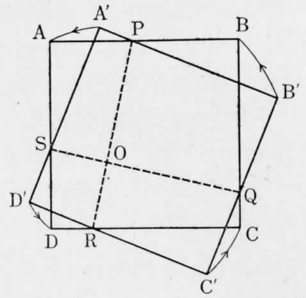



図 5

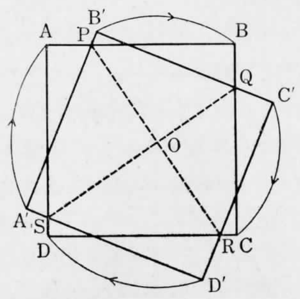



図 6

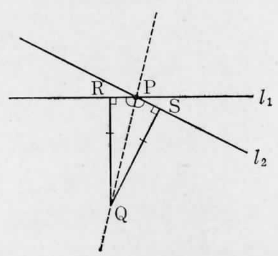



図 7

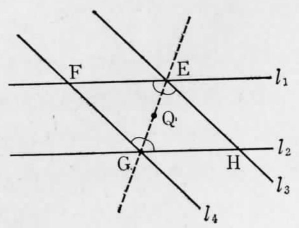
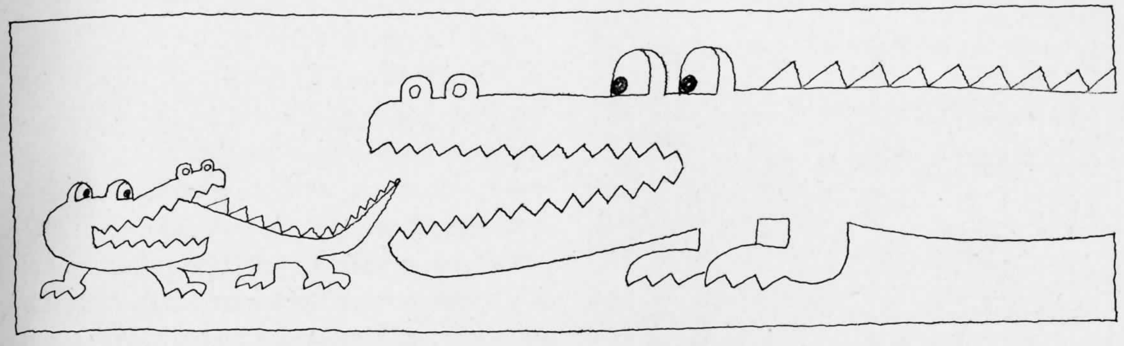



図 8



# 大さな数を構成する　SYSTEM 5



**1．原始帰納的関数**

現代の数学では，しばしば，公理的方法によって理論が構成される．つまり，対象やそれらの間の関係を表わす述語の領域を想定し，この領域での対象や述語の関係を公理によって規定し，理論に含まれる定理は，すべてこれらの公理から導びこうというものである．

このとき公理系（公理の集まり）には，それらが無矛盾であるという条件はつくものの，公理系の作り方にそれ以上の制約はないので，作り方によっては，対象（や述語）の領域としてずい分大きなものを表わすこともありうる．

たとえば，公理系としてペアノの公理を採用すれば，領域に含まれる対象は自然数であり，それらの全体は，外から眺めれば，可算個ということになる．

また，公理系として，順序体の公理，連続の公理を採用すれば，対象は実数であり，それら全体の濃度（個数）は，連続体の濃度となり，可算個よりもたしかに多くなる．

公理系のとり方によっては，これらよりもはるかに大きな濃度の対象領域を必要とするものも容易に作ることができる．

しかしながら，このような公理的な立場を離れて，対象を有限的な手段で構成して行くということになると，問題は，はるかにむつかしくなる．

有限個のものから出発して，それらを有限個の操作のどれかで統合し，そのような操作を有限回繰り返えすというのでは，いくら行なってもでき上ったものの個数は有限個であり，そのようにしてできたもの全体を考えても，たかだか可算個にしかならない．

たとえば，自然数は，

イ）0は自然数である．

ロ）$n$ が自然数のとき $n'$（$n+1$ を表わす）は，自然数である．

によって構成できる：

$$0, 0', 0'', 0''', 0'''', 0''''', \cdots\cdots$$

また，構成した対象の間に適当な順序を入れて，可算順序数（の一部）を構成することもできる．

イ）1は順序数である．

ロ）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が順序数のとき，

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ も順序数である．

ハ）$\alpha$ が順序数のとき，$\omega^\alpha$ も順序数である．

ここで，$1+1=2$，$1+1+1=3$，$\omega^1=\omega$，$\alpha+\alpha=\alpha2$ と書くなどの便法を使えば，1以上，$\varepsilon_0$ 未満の順序数がすべて表現できる．

$$1, 2, 3, \cdots, \ \omega, \omega+1, \omega+2, \cdots, \ \omega2, \omega2+1, \cdots, \ \omega3, \cdots,$$
$$\omega^2, \omega^2+1, \cdots, \ \omega^2 2, \cdots, \ \omega^3, \cdots, \ \omega^\omega, \cdots, \ \omega^{\omega+1}, \cdots, \ \omega^{\omega2},$$
$$\cdots, \ \omega^{\omega^2}, \cdots, \ \omega^{\omega^\omega}, \cdots, \ \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ \cdots\cdots$$

自然数の上の関数も構成的に作ることにすれば，帰納的関数と言われているものが得られる．たとえば，その一部となっている原始帰納的関数は，定値関数 $\varphi(x)=c$，恒等関数 $\varphi(x)=x$，直後関数 $\varphi(x)=x'$ から出発して，代入やつぎの帰納的構成法を何回か繰り返えして得られたものである．

［帰納的構成法］

$\psi(x, y)$ が原始帰納的関数のとき，

$$\begin{cases} \varphi(0)=c & \text{（定数）} \\ \varphi(x')=\psi(x, \varphi(x)) \end{cases}$$

を満たす関数 $\varphi$ は，やはり原始帰納的である．

これによって，日常われわれが使っている多くの関数が原始帰納的であることが確められる．