不動点をお見せします（表紙のつづき）

西山 豊

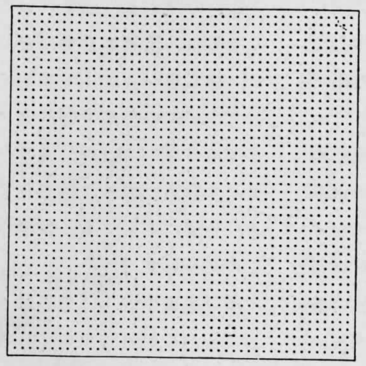

図 4　規則的なパターン

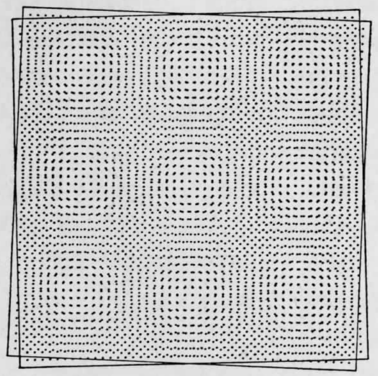

図 5　同心円がいくつも見える

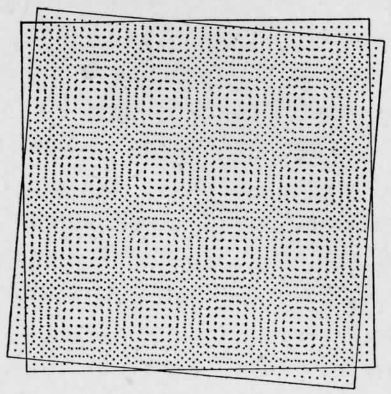

図 6　さらにたくさん見える

表紙の図3のように回転した位置関係から，ビニール紙を左右に動かせば，同心円の中心は上下に移動します．逆に，上下に動かせば，中心は左右に移動します．ビニール紙の動きと同心円の移動は，つねに直交する方向になっています．

このパターンが描き出す奇怪な動きの虜になってしまうと，しばらくは，このパターンを手放したくはなくなってしまいます．

こうして私は，同心円の中心を，ジーッとながめていまして，この中心は，正方形の辺と辺の交点をむすぶ2直線の交点と一致することに気付くことができたのです．

・　・　・　・　・

ここで，不動点をみつけるためには，どうして点がランダムに並んでいなければならないかについて，説明しておきましょう．図4に示すような，規則的な点群のパターンが，自らそれを語ってくれます．点の数は，図2とほぼ同数です．

上のビニール紙を少し回転します．同心円は，いくつもできてしまいます．（図 5）　回転をさらに続けますと，同心円の数は増えます．円の数に反比例して，円の半径は小さくなっていきます．（図 6）　これでは，一体，不動点はどれであるのかわかりません．

つまり，点をランダムに並べたことが，不動点を示すための必要条件になっていたのです．このことを，無秩序の効用とでもいうのでしょうか．

（にしやま ゆたか／日本アイ・ビー・エム）

エレガントな解答をもとむ

出題と解答／山崎洋平・加古 孝

出題

● 1

四面体の牛乳パックから細長い帯を切りとり，折れ目をのばして台紙に貼りつけます．どんなに大きな台紙を用意しておいても，切りとり方次第では台紙に収めきれないことがあります．このことを次の設定のもとに示してください．ただし帯は曲りくねっていても構いませんが，平面上に貼ることができるものに限ります．貼るに当っては，帯が自分自身に重なる部分をもっても差しつかえないものとします．

初級問題　　正四面体のばあい

上級問題　　一般的なばあい

（山崎洋平）

● 2

$f(x,y), g(x,y)$ を x, y の高々 $2m$ 次の実係数多項式とします．このとき次の連立方程式

$$\begin{cases} x^{2m+1}+f(x,y)=0 \\ y^{2m+1}+g(x,y)=0 \end{cases}$$

には，必ず実根があることを示してください．

（加古 孝）

エレガントな解答をもとむ　応募規定

送先／160 東京都新宿区須賀町 14，日本評論社，数学セミナー，〈エレガントな解答〉係

締切／1982 年 8 月 10 日までに到着のこと．

用紙／本誌と同じ大きさのものに限る．

解答用紙一枚ごとに，その上部に以下のことを記入すること．二問に応募の場合は，解答用紙を問題ごとにかえること．

A：問題の番号（例：8 月号問 1）

B：住所，年齢，職業，氏名（仮名でも可）

誌上仮名はさしつかえありませんが，連絡の都合もありますので，封筒にはかならず本名と正確な連絡先をご記入ください．

解答／5 月号出題

● 1

以下に述べる，有名な ‘Hölder の不等式’ の平易でエレガントな証明を募集します．

p, q を正数とし $1/p+1/q=1$ をみたすとする．n 項正数列 $\{a_i\}$ および $\{b_i\}$ に対し

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^q\right)^{1/q} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (*)$$

が成立する．等号条件は

$$a_i b_j = a_j b_i \qquad (1 \leq i \leq j \leq n)$$

である．

まずは訂正から．等号条件は

$$a_i^p b_j^q = a_j^p b_i^q \qquad (1)$$

ではないかという指摘多数．然り，ワザアリと認めます．さらに DR. FROG 曰く‘誤植ではなく，数学者にありがちな，うっかりした思い誤りと思う’．こうまで押さえ込まれてはアワセワザ一本を否めますまい．

この不等式は b_i が全部1のとき

$$\left(\sum a_i^p/n\right)^{1/p} \geq \sum a_i/n \qquad (2)$$

を意味し，この関係式を認めると $u>v>0$ に対し $p=u/v$ とおけば

$$\left(\sum x_i^u/n\right)^{1/u} \geq \left(\sum x_i^v/n\right)^{1/v} \qquad (3)$$

も $a_i = x_i^v$ に対して (2) を適用して得られます．(3) でさらに $v \to 0$ となったときは

$$\left(\sum x_i^u/n\right)^{1/u} \geq \left(\prod x_i\right)^{1/n} \qquad (4)$$

となりますから，‘相加平均は相乗平均より大きい’という有名な命題も本題の傘下にあるといえるわけです．応募 29 通中正解 26，以下敬称は略します．

最も多かったのは Young の不等式

$$xy \leq x^p/p + y^q/q \qquad (5)$$

を $x_i = a_i/(\sum a_i^p)^{1/p}$，$y_i = b_i/(\sum b_i^q)^{1/q}$ に適用し，和をとって

$$\frac{\sum a_i b_i}{(\sum a_i^p)^{1/p}(\sum b_i^q)^{1/q}} \leq \sum\left(\frac{a_i^p}{p\sum a_i^p}+\frac{b_i^q}{q\sum b_i^q}\right)$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad (6)$$

とするもので等号条件は (5) のそれに帰着します．(5) の証明は，ものの本に書いてあるような