ル，香港などを訪問した．今度機会があったら，友好的な隣国日本をぜひ訪れたいと希望している．私たちの研究は中国政府から高く評価された．1982 年，陳景潤，潘承洞と私のゴルドバッハ問題の研究は自然科学の一等賞を授けられた[3]．私の生活も改善され，いまでは個室が三部屋ある家を割当てられ，月給もいくらか上がった．すべてが具合よくいっている．

このすばらしい日々に，私は一分の時間も惜しんで，中国の数学の振興のために全力をあげなければならない．

［白鳥冨美子訳］

訳注：1）〈五・七〉幹部学校．1966 年5月7日の毛沢東の指示にもとづいて，政府機関の幹部などが一定期間下放して開墾作業などに従事した，その地点をこう称した．文革中は，その本来の主旨よりも，幹部や知識人の労働改造の場所として極左派に利用された．

2） 中国共産党第 11 期中央委員会第3回総会．1978 年 12 月に開かれ，それまでの極左主義的指導思想の名残りを払拭し，国民経済近代化のための，現実的な，経済合理主義的な路線のために道を開いた．これ以後，中国近代化の建設プログラムがはじめて軌道に乗った．

3） 83 年1月号の本誌の一松信氏のコラム「Air Mail」を参照されたい．

文献（訳者付す）

（1） 華羅庚：『数論導引』科学出版社 (1957)（増補版 1979）

ゴルドバッハ問題にかんするもの

（2） 王元：数学学報，4, 500 (1956)

（3） 王元：科学記録，1, 9 (1957)

（4） 王元：科学記録，1, 267（摘要）(1957)：数学学報 8, 413 (1958) Sci. Sin., 8, 3（全文）(1959)：Sci. Sin., 9, 1033 (1962)

（5） 潘承洞：数学学報，12, 95 (1962)：Sci. Sin., 12, 455 (1963)

（6） 陳景潤：科学通報，17, 385 (1966)

（7） 陳景潤：中国科学，16, 111 (1973)

数値積分への数論方法の応用にかんするもの

（8） 華羅庚・王元：Sci. Rec. New Ser., 4 (1) 8 (1960)

（9） 華羅庚・王元：（I）Sci. Sin. 13 (6), 1007 (1964)：（II）Sci. Sin., 13 (6), 1009 (1964)：Sci. Sin., 14 (7) 964 (1965)

（10） 華羅庚・王元：（I）Sci. Sin., 16 (4) 483 (1973)：（II）Sci. Sin., 17 (3), 331 (1974)：（III）Sci. Sin., 18 (2), 184 (1975)

（11） 華羅庚・王元：『数論在近似分析中的応用』科学出版社 (1978)

（論文は最初のページだけを記した）

（Wang Yuan／中国科学院数学研究所）

中国数学会代表団の来日

4月に広島大学で開かれる日本数学会年会に日本数学会から招待された中国数学会代表団が，4月4日に来日する．団長は蘇歩青中国数学会副理事長・復旦大学名誉学長で，団員は王元中国科学院数学研究所教授と胡和生復旦大学数学系教授（女性）の二人．一行は年会に参加後，大阪，京都，東京，仙台の各地で交流や見学を行ない，4月 15 日に成田から帰国の予定．

ビンゴ・ゲーム

西山 豊

12	23	⑤	24	16
8	19	15	2	20
14	22	⑨	18	10
④	①	⑬	⑦	㉕
㉑	17	6	11	3

図 1 カード

1. 偏差値を否定する番組

少し前，関西系テレビで，板東英二，桂文珍，笑福亭鶴瓶の三氏の共同司会による，「The ビッグ！」というビンゴ・ゲームを取り入れた娯楽番組が放映されたことがある．

ゲームの概要は次のとおりである．

まず，視聴者に図1のようなカードを配っておく．たて5，よこ5のます目のカードには，1 から 25 までの数字が重複することなく，でたらめにふられている．

テレビ局には，1 から 25 までの数字をかいたボールが特設の“ピッチング・マシン”の中に入っている．板東氏の「ビンゴ，シュート！」のかけ声とともに，ボールが一球ずつ飛び出してくる．たとえば，⑤，①，⑦，㉕，……というように．

視聴者は，出てきたボールの数字をカード上で探し，丸印をつけていく．そうして，どの列でもよい，丸印をつけた数字が一列に並んでいたら，テレビ局に電話をする．局の方では，コンピュータに登録されていたコード番号でカードを表示し，それが一列に並んでいることを確認する．

ゲームのルールは，このとおり簡単だが，景品がはずんでいる．5個の数字で一列そろえば，最新の自動車があたるというのがたまらない．たった一枚の葉書きで，車があたるというのだ．

最近のテレビ番組は，クイズやゲームをとり入れたものが非常に多い．「アップダウンクイズ」（毎日）をはじめ，「パネルクイズ，アタック 25」（朝日），「クイズ，タイムショック」（朝日）などは，視聴者のもの知り度と教養を試すものである．一方，「人生ゲーム，ハイ & ロー」（毎日）や「The ビッグ！」（朝日）などは，知識がなくてもけっこう楽しめる．「ハイ & ロー」は上か下かの選択だけだし，「ビンゴ・ゲーム」は数字に丸印をつけるだけだから．

今の世の中は，能力主義が横行している．受験生には共通一次試験の偏差値が，サラリーマンには営業成績が大きくのしかかってくる．考えながらテレビを楽しむというのもよいが，考えなくても楽しめる番組がもっと増えてもよいのではないか．娯楽番組は，もっと遊びの精神に徹してほしい．そして，優等生も劣等生も区別なく，視聴者全員が平等に参加できるものであってほしい．そういう意味で，私は，ビンゴ・ゲームの番組が大変好きであった．

私は局に何回かカードの応募葉書きを出した．しかし，カードは送ってもらえなかった．恐らく，甘い砂糖に群がる蟻のごとく，葉書きが局に殺到したのであろう．カードが届かぬうちに，番組は終了してしまった．

あとは恨みが残るだけである．そして，恨みは時とともに薄れ，いつしかビンゴ・ゲームの数理的興味に移っていく．以下は，私の研究レポートの全容である．

2. 何列そろえることができるか

まず，てはじめに，限られたボールの数で何列できるかを考えてみよう．

列の種類は図2に示すごとく，全部で 12 通りある．たて5列，よこ5列，ななめ2列のそれである．

ボールの数を1から 25 まで増やしていったとき，各ボールの数で何列できているかの全体図を図3に示しておいた．これを完成させるのに，約一日かかった．パターンは，できるだけ系統的になるようまとめたつもりである．

ボールの数が1個から4個までの間は，いくら努力しても1列できない．5個から8個までの間は，1列できるが，できないこともある．9個から 11 個までの間は，最大2列までできる．

このようにして，ボールの数を増やすと，できる最大列の数も増えていく．ボールの数が 20 個の場合は，最

表 1 r 個のボールでとりうる列数の最大と最小

個数 r	最小	最大	幅
1	0	0	1
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	0	1
5	0	1	2
6	0	1	2
7	0	1	2
8	0	1	2
9	0	2	3
10	0	2	3
11	0	2	3
12	0	3	4
13	0	3	4
14	0	4	5
15	0	4	5
16	0	5	6
17	0	6	7
18	0	6	7
19	0	7	8
20	0	7	8
21	2	8	7
22	4	8	5
23	6	9	4
24	8	10	3
25	12	12	1

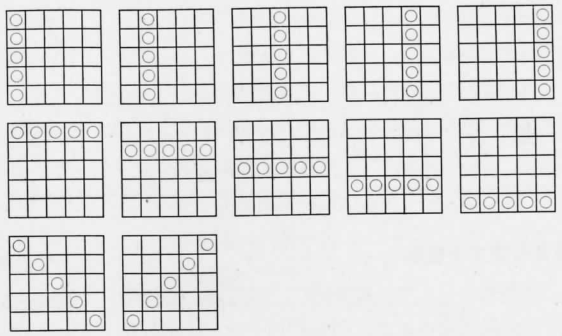
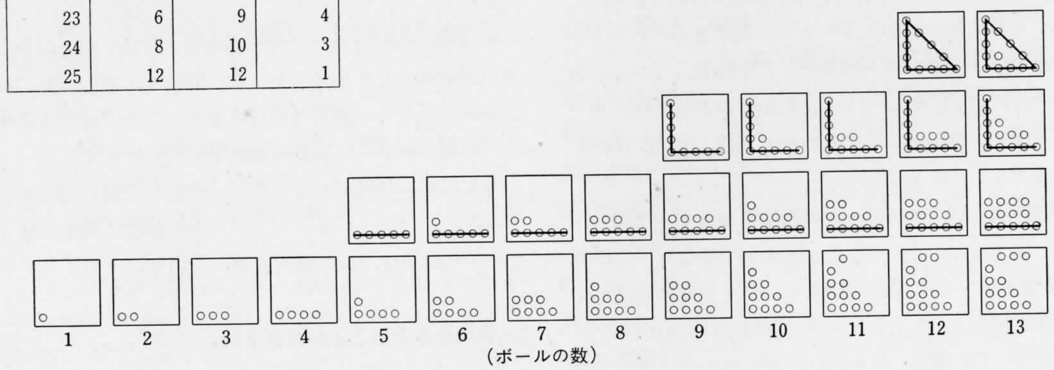


図 2 12 種類のパターン



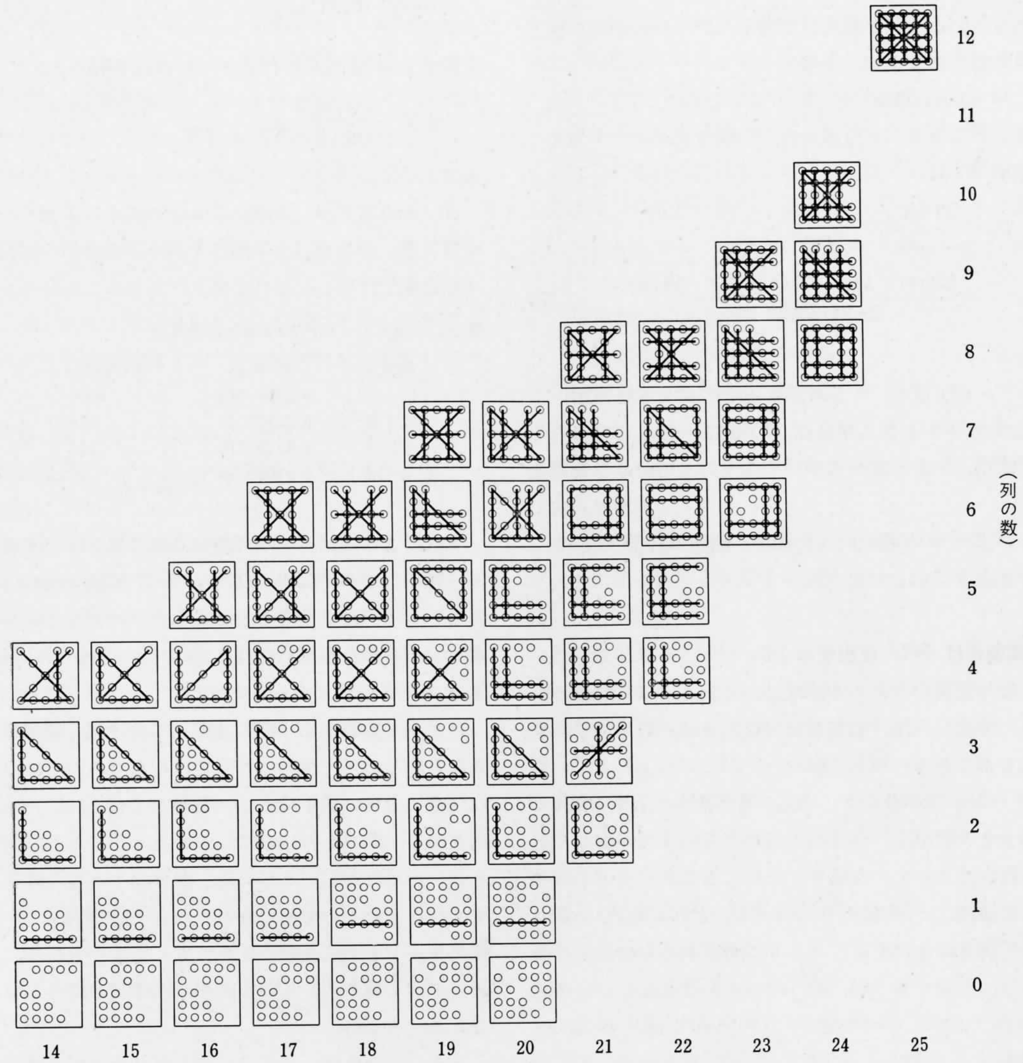


図 3 ボールの数と可能な列数のパターン

大7列となる．

ところが，ボールが 21 個になると，今度は逆に，いくらうまく並べても，0列と1列はつくれない．最小列が，21 個の場合は2列，22 個の場合は4列となっていく．そして，最後に，25 個の場合は，12 列の1通りだけとなる．

列数の最大と最小，その幅を表1にまとめておいた．幅が一番大きいのは，ボールの数が 19 個と 20 個のときで8通りである．

それにしても，ボールの数が 20 個もありながら，1列もそろうことがないこともあるというのは，興味深いことである．

3. 1 枚の葉書きであたる確率は？

さて，ビンゴ・ゲームでは，何列できるかということより，1列そろうことが問題になっているので，列数の少ない場合について考えていこう．ボールの数が9個以上になると，2列そろうこともあり，問題が複雑になるので，ボールの数は5個から8個までと限定しておく．

ボールの数を r 個としたとき，1枚のカードが1列そろっている確率 P_r はどうなるのだろうか．

まず $r=5$ の場合は次のようになる．

ます目の数は $5\times5=25$ 個ある．この中から，任意の5個の場所を選ぶ場合は，全部で，

$_{25}C_5$ 通り

ある．そして，5個のボールが1列そろうのは，図2に示すごとく，

12 通り

であった．したがって，5個のボールで1列そろう確率 P_5 は，

$$P_5=\frac{12}{_{25}C_5} \qquad (1)$$

となる．

次に，$6\leqq r\leqq 8$ の場合はどうだろうか．

25 個のます目から，任意の r 個の場所を選ぶ場合は，全部で，

$_{25}C_r$ 通り

ある．r 個のボールで1列そろう場合は次のように考えるとよい．いまかりに，1列そろった状態を図4に示す．

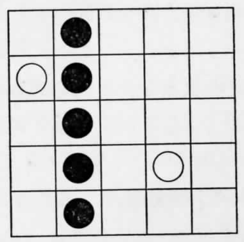


図 4 黒丸で一列

黒丸の5個はそろったボールに関与し，白丸の $(r-5)$ 個は列に関与しないボールである．こうしたとき，列に関与しない白丸の並べ方が何通りあるかが問題で，それは残りの 20 個の場所から $(r-5)$ 個のボールをならべる組合せとして求まる．つまり，それは，

$_{20}\mathrm{C}_{r-5}$ 通り

である．いま，列を固定して考えたが，列の固定の仕方は 12 通りあるので，全部で

$12\cdot{}_{20}\mathrm{C}_{r-5}$ 通り

あることになる．したがって，r 個のボールで1列そろう確率 P_r は，

$$P_r=\frac{12\cdot{}_{20}\mathrm{C}_{r-5}}{{}_{25}\mathrm{C}_r}$$
$$=\frac{12\cdot r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21} \tag{2}$$

となる．

さて，(2) 式は，$6\leqq r\leqq 8$ として考えてきたが，この式に $r=5$ を代入すれば (1) 式と一致しているので，(2) 式は，$5\leqq r\leqq 8$ についてなりたっていることになる．

この式に r の値を代入すれば，確率が計算できる．それを表2に示しておいた．

4. 葉書きは 3070 枚出せばよい

1枚の葉書きであたる確率は，このようにして求められた．では，一体，葉書きを何枚出せば，新車を手にすることができるのだろうか．

「それは，確率分の1である」と即断してはいけない．葉書きを n 枚出しつづけたとして，そのうちの少なくとも1枚があたっている確率を求めてみよう．

この命題は，「n 枚出しつづけて，どれもあたっていない，ことはない」というようにおきかえられる．この関係は，英語で言うと，at least (少なくとも) と not always (必ずしも～でない) とのそれではなかったかと思う．

1枚の葉書きであたる確率は P_r であったから，あたらない確率は，余事象であるから，

$1-P_r$

である．そして，n 枚ともあたらない確率は，その積として求まり，

$(1-P_r)^n$

である．そして，この余事象，

$1-(1-P_r)^n$

をとれば，これが求める確率になる．

n に 0, 1, 2, … を代入して，この確率を計算していくと，その値は0から1へ増えてゆく．そこで，この確率が 1/2 を越えたときが，この賭けに勝算ありとみなしてみることができる．つまり，

$$1-(1-P_r)^n>\frac{1}{2} \tag{3}$$

を満たす n を求めればよい．この式を解くと，

$$n>-\frac{\log 2}{\log(1-P_r)} \tag{4}$$

となる．

ボールの数 r が，5個から8個の場合の1列そろう確率 P_r と，少なくとも1回は1列そろうための試行回数 n を電卓で計算し，それを表2にまとめておいた．

表 2 一列そろうための確率と試行回数

個数 r	確率 P_r	試行回数 n
5	0.2259×10^{-3}	3069
6	0.1355×10^{-2}	512
7	0.4743×10^{-2}	146
8	0.1265×10^{-1}	55

これによれば，ボールの数が5個の場合は，1回でそろう確率は 0.0002259 であり，3069 回繰り返せば，少なくとも1回は1列そろうであろうということになる．ボールが6個なら試行回数は 512 回，7個なら 146 回となる．

つまり，葉書きを 3070 枚出しておけば，新車を手に入れられるのだ．気軽に言ってはみたものの，この数字は非常に大きい数字である．葉書きの値段は，1枚 40 円だから，約 13 万円の費用がいることになる．葉書きを買いしめたとしても，一体，誰が局への宛名書きをしてくれるというのであろうか．たとえ，幸運にも 3070 枚のカードを手に入れたとしても，このうちから，どのカードが1列そろっているかを，短時間で調べることができるだろうか．

もうこうなれば，マイコンでも買わなければならない．テレビ局のコンピュータと視聴者のマイコンとの会話ということになってしまう．こうしてみると，葉書きで新車を手に入れるのは，はかない夢であるのかと考えこんでしまう．

5. 確率を計算機で証明する

以上，簡単な確率計算を行なってみた．この種の問題は，共通一次試験でよくみられる．

数学愛好者なら，これで満足だろう．しかし，非数学愛好者は，決して満足しない．数式は抽象的である．計算に用いた記号 C (Combination: 組合せ) がよくわからない．だから私達，数学が苦手なものには理解できない，と訴えるであろう．

そういう非数学愛好者のために，別の角度からこの問題を考えてみよう．

一番納得されやすい方法は，実際にゲームをやって，統計をとってみることである．テレビ局が発行したカードの総枚数と，1列そろっている視聴者のカード枚数から確率が求まる．また，何枚も葉書きを出しつづけて，何回目に1列そろったかを記入してゆくという方法もある．

しかし，これらの方法は，費用もかかるし，現実的ではない．

そこで，これと同等のことを計算機にやらせてみる．こういうのを模擬実験（シミュレーション）とよんでいる．

視聴者には，図1のように，ランダムに並べられたカードが配られている．そして，局から知らされるボールの数字もランダムである．

問題を簡単にするため，視聴者は，図5のようなカードを1枚だけ持っているとする．そして，局から知らされるボールの数字がランダムであるとする．

たとえば，ボールが，⑤, ①, ⑦, ㉕, ⑨, ……ときた場合，これを図5のカード上に丸印をすれば図6になる．この場合は，ボール8球でも1列そろっていない．

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25

図 5 カード

①				㉑
	⑦			
		⑬		
④	⑨			
⑤				㉕

図 6 ボール

ランダムなボールの数字を，限りなく生成し，それが1列そろっているかを調べる．それでは，このようなランダムなボールの数字を，どのようにして作り出すのだろうか．

計算機では，一様乱数がよく使われる．一様乱数は，(0, 1) の開区間で，一様にとりうるランダムな実数値である．いま，それを x としておく．

欲しいのは，ボールの数字である．数字は1から 25 までの整数であることと，1回とり出した数字は使えないという2つの条件を満たさなければならない．

ここで，ボールに書いてある数字を考えず，残っているボールの個数に注目すると，初回は 25 個の中から，2回目は 24 個の中から，3回目は 23 個の中から選ぶということになる．これらの数字を I_1, I_2, I_3 としておくと，これらは，

I_1(整数) $=x$(実数) $\times25+1$

I_2(整数) $=x$(実数) $\times24+1$

I_3(整数) $=x$(実数) $\times23+1$

のようにして，一様乱数 x から求めることができる．整数演算は小数点以下を切り捨てるという，計算機特有の性質を利用している．

このようにして得られた数値，たとえば 5, 1, 5, …は，ボールに記されてある数字におきかえられなくてはならない．

その過程を図7に示した．

一様乱数から生成された数値は，5, 1, 5, 22, 6, …である．一度使われたボールの位置はスキップして並べると，(5), (1), (7), (25), (9), ……のようになる．つまり，これが欲しかった，ランダムなボールの数字である．

少しまわりくどい説明になったが，これでボールの数字が作り出されたとしよう．

ボールを8球ずつ，10 万回試してみた．8球で1列そろったのは 1258 回であった．したがって1回で1列そろっている確率 P は，

$P=1258/100000=0.1258\times10^{-1}$

で，表2の理論値 (0.1265×10^{-1}) と比較すると，オーダー的によくあっていることがわかる．

何回目でそろうかの度数分布を，5回ごとのきざみで作成してみると図8のようになる．1回で1列そろうこともあり，500 回以上やらないとそろわないこともある．

この度数分布の累積をとってみると図9になる．累積値が全体 (1258 回) の半分 (629 回) になる試行回数を逆にたどってみると，55 回となっていた．つまり，式 (4) で計算したように，ボールが8球の場合は，試行回数 n が 55 以上ならば，少なくともそのうちの1回は1列そろっていることになるという理論値とあっていることがわかる．

今までの数学は，数式主体のものであったが，このように計算機をとり入れて，抽象から具象への試みがなされるならば，数学は，もっと楽しくなるに違いない．

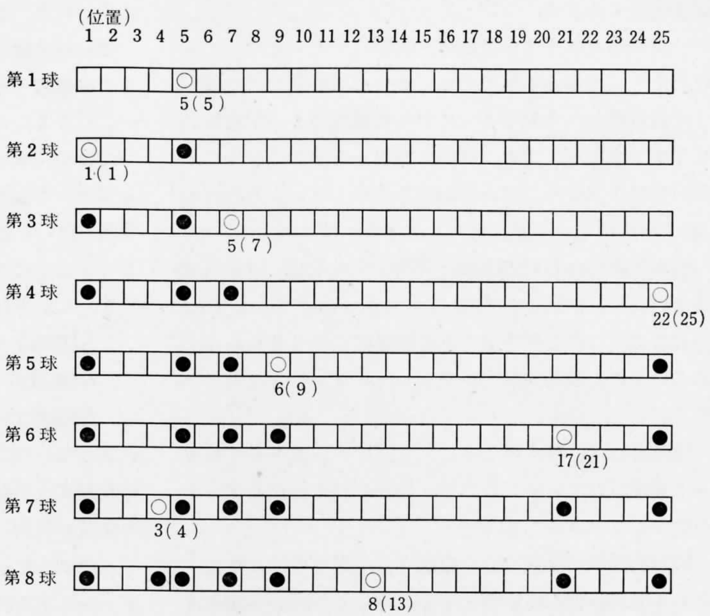


図 7 ボールの数字のきめ方
(かっこ内の数字が実際の数字)

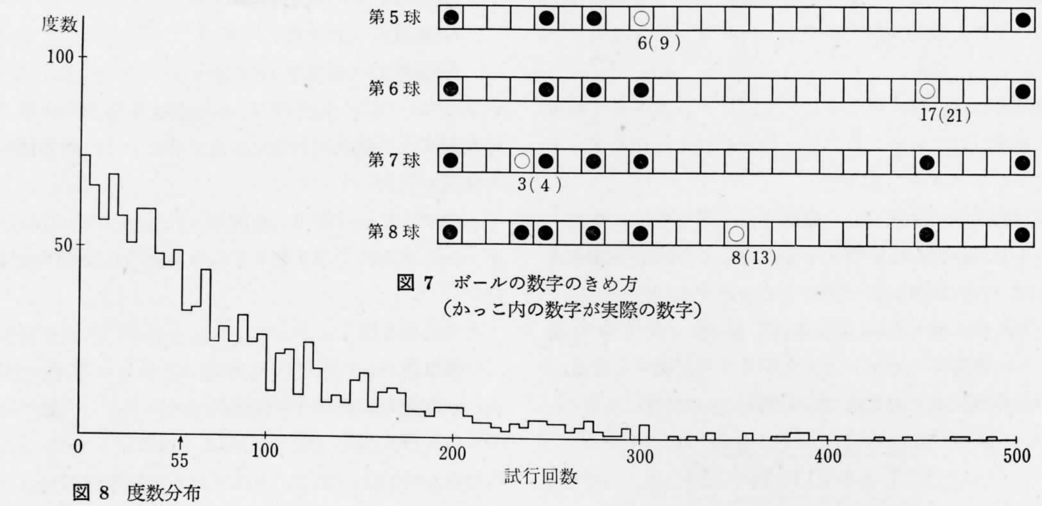


図 8 度数分布

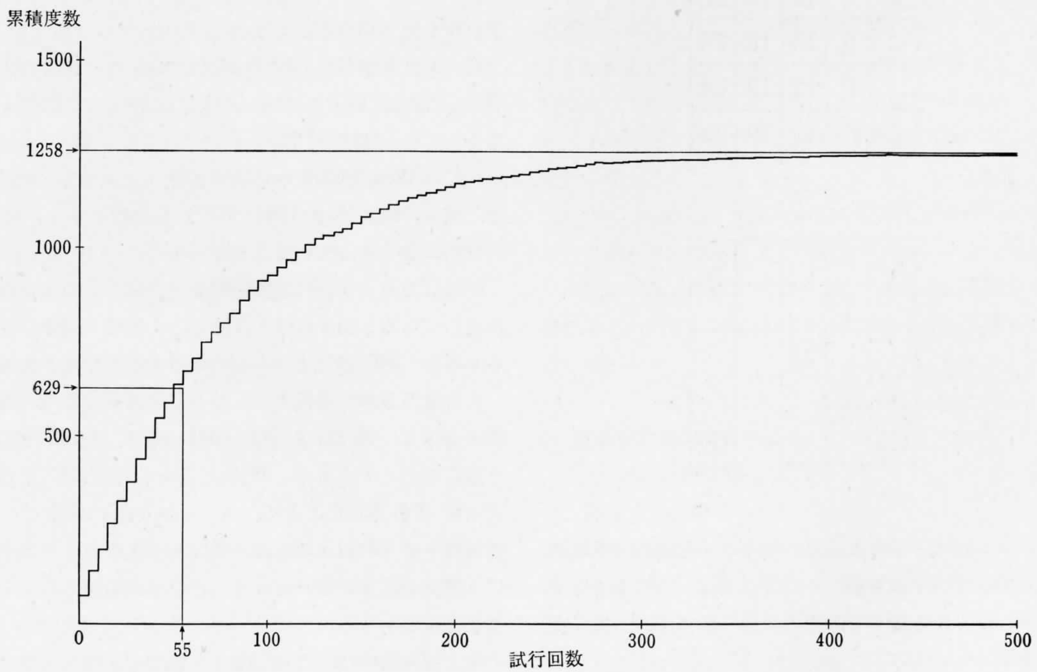


図 9 累積分布

(にしやま ゆたか／日本アイ・ビー・エム)

ポアンカレと常微分方程式 2

ポアンカレ

齋藤利弥

II. 局所的理論 2 (不確定特異点での漸近展開)

Poincaré の常微分方程式に関する仕事の中に，局所理論的なものがもう一種類ある．それは線形方程式

$$(11)\quad \frac{d^ny}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+p_n(x)y=0$$

の不確定特異点に関するものである．

$p_1(x),\cdots,p_n(x)$ は x の有理関数とし，(11) が $x=\infty$ に特異点をもつものとする．もしそれが確定特異点とよばれるタイプの特異点ならば Fuchs によって問題は解決されており，$x=\infty$ の近傍で収束する解の展開式を求めることができる．しかしそうでないとき——これを不確定特異点というわけであるが——には Fuchs の方法は適用できない．

Thomé は (11) が $x=\infty$ に不確定特異点をもち，かつ $p_k(x)$ がすべて $x=\infty$ で正則なとき，それが

$$y=e^{P(x)}x^{\mu}\varphi(x)$$

のような形の形式解をもつことを発見した．ただし $P(x)$ は多項式，μ は複素定数，$\varphi(x)$ は $1/x$ の形式的べき級数である．ところがこの級数は多くの場合発散してしまうのである．この結果から Poincaré は次の二つの問題を引き出した．

1. Thomé の形式解はどんな条件があれば収束するか？
2. Thomé の形式解が発散する場合でも，それは何らかの数学的意味をもつのではなかろうか？

1880 年，フランス科学アカデミーは「線形常微分方程式の理論を，何らかの重要な点において改良すること」というテーマで論文を募った．Poincaré はこれに応募し，惜しくもグラン・プリを逸したが "très honorable" という，いわば優秀論文賞を受けた (Hermite によるこの懸賞論文の審査報告が 1881 年3月 14 日の科学アカデミー報告にのっている．これはまた Poincaré 全集第2巻の，p. 71—74 にも集録されている)．これが論文 [48] である．この論文は二つの独立な部分から成り，その第2部だけは Poincaré の死後 Acta Mathematica に発表されたが (文献リスト参照)，第1部は遂に公刊されなかった．しかしこの Acta Mathematica に発表された第2部 (Extrait d'un mémoire inedit de Henri Poincaré) を Poincaré 全集第1巻にのせるに当って，全集の編集者の一人である Jules Drach が附記した脚註を見ると，未発表の第1部はまさに Thomé の形式解に関するものであり，Poincaré は後にその結果をさらに発展させた論文 [31], [40], [46] を書いていることがわかる．これら三つの論文において Poincaré が得た主な結果を紹介しておこう．

彼は複素平面上に適当にえらんだ路 C に沿ってのラプラス変換

$$y(x)=\int_C v(z)e^{zx}dz$$

を行って (11) を v に関する微分方程式に変換する．(11) の解は，この変換された方程式の解 $v(z)$ を用いて上のように積分表示されることになる．したがって $v(z)$ の性質をくわしく知ることにより (11) の解 $y(x)$ を調べることができる．この方法によって彼はまず次のことを証明する．

1° Thomé の形式解が収束する必要十分条件は，変換された方程式が整関数の解 $v(z)$ をもつことである．

次に Thomé の形式解が発散する場合を考えるために，彼は漸近展開という概念を次のように導入する．

x 平面上に原点から出発する無限半直線 l をとり，$f(x)$ を l 上の十分遠い点では正則な関数とする (すなわち直線 l が実軸となす角を ω とすれば，$f(x)$ は $\arg x=\omega$, $|x|>R$ において正則)．形式的な無限級数