ーマシン自体の設計図がミスコピーされる場合がある．次世代で，この突然変異体コピーマシンが自分の DNA をコピーするときのミスコピー率は親のものに比べて上がる場合も下がる場合もある．複製精度が改善されたコピーマシンは理想に一歩近づいたことになるかどうかを問題にしよう．

それぞれのコピーマシンをもつ二種大腸菌の生存競争実験をしてやればよい．おもしろいことに，複製精度が改善されたものの方が敗北するのである．DNA ポリメラーゼは複製精度を上げるために誤りを修正する能力をもっている．しかしもちろんこの誤り発見の際にも誤りを犯す．さきほどの精度の改善されたコピーマシンというのは，拙速を恐れて，しょっ中修正しているマシンなのである．このため仕事が遅い上，エネルギーを余計に食う．結局，総合性能は拙速型の方が上ということになる．こうして，進化の頂点に立つ DNA 上の情報は，自分自身が変化するように指令を出していることになる．そしてこのことがまた DNA 分子上に情報が蓄積してきた要因，すなわち進化の要因となっている．

簡単のために DNA 上の文章が，(0, 1) の二種の文字 ν 個の配列からできているとしよう．配列の種類は 2^ν ある．各配列を空間中の点に対応づけ，ハミング距離という距離を導入したものを，塩基配列空間と呼ぼう．ハミング距離というのは，点突然変異で結ばれる2点を単位長の距離に置くことである．例えば $\nu=4$ の場合の4次元配列空間は4次元立方体（図7）であらわすことができる．この空間の2点間距離の最大値は ν である．$\nu=70$ の場合の具体的数値をあたってみよう．

点の数は

$$2^{70} \doteqdot 10^{21}$$

で，最大距離は 70 である．

この空間を3次元ユークリッド空間と比較しよう．地球の大きさの球形空間を格子間隔 1 m の立方格子で埋めつくすと，格子点の数は上と同じ 10^{21} になる．しかし最大距離は，南極と北極の間の距離で，10^7 という巨大なものになる．配列空間がいかに密に詰ったものか，おわかりいただけるだろう．任意の情報から出発して，最も進化した情報まで達するのに進む距離は，ほんのわずかである．そのかわり，配列空間中では道に迷いやすい．一つの点は ν 叉路になっている．上述のユークリッド空間では6叉路にすぎなかった．実は，この距離の短かさと迷いやすさが，相殺して，ランダムに進む場合，最適点に達する時間はユークリッド空間の場合と同じになってしまう．

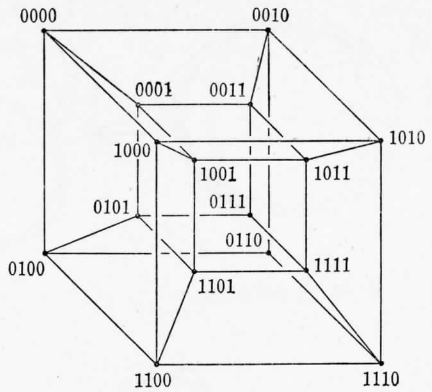

図 7

しかし羅針盤を手に入れ，道に迷うことが少なければ速やかに最適点に達することができよう．この羅針盤に相当するものが，ダーウィンの自然淘汰の原理である．地球誕生以来，「わずか」10^{17} 秒しかたっていないのに，地球上の DNA にはヒトを設計できるほどの情報が蓄積した．この羅針盤はかなり強力なものだったに違いない．

（ふしみゆずる／埼玉大学）

円を重ねる
（表紙のつづき）

西山 豊

1. 無数にある不動点

半径の等しい二つの合同な円 O, O′ があります（図1)．これらの円を重ね合わせる問題を考えてみましょう．あたかもマンホールのふたを重ねる場合に類似しています．さしずめ，2つの円に接線 l を引き，その接線に沿って平行移動するか転がすかによって，この問題は解決しますが（図2)，ここでは不動点の問題として解いてみましょう．

図3に示すように，円 O, O′ に交線を引き，その線上に任意の点 P をとります．点 P を指またはコンパスの針のようなもので押さえ，円 O′ を回転させますと，2つの円は完全に重なります．点 P は，この線上ならどこにあってもかまいません．この点が，合同変換の場合の不動点になっているのです．不動点を P_1, P_2, P_3 とすることによって，交線 XY が X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 に移るところを作図しました（図4)．これによると，不動点は無数にあることになります．

もし興味を持たれたなら，2枚の円を切り抜き，それで実験されるとよいでしょう．

点 P を円 O, O′ の交線上にもってくると，それがどうして不動点になっているかの証明は，あまり難しくないので，詳しくは述べませんが，点 P を通り円の中心

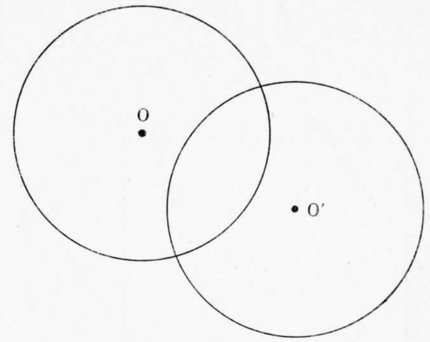

図 1　合同な円

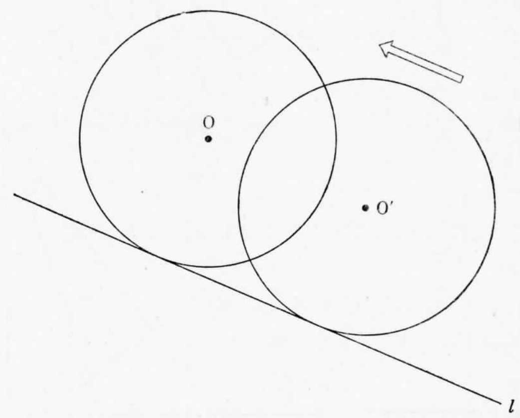

図 2　平行移動

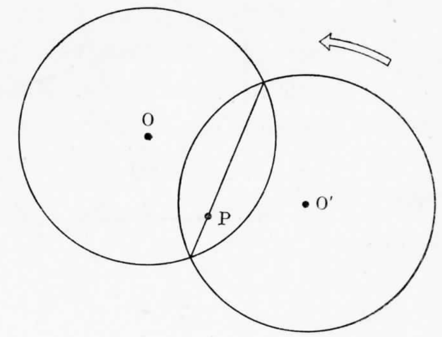

図 3　不動点 P

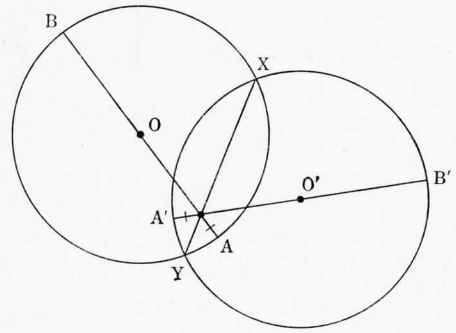

図 4　無数にある不動点

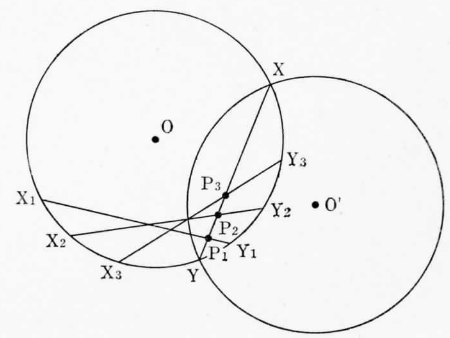

図 5

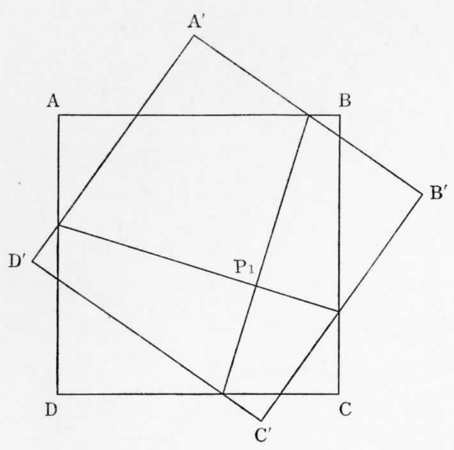

図 6

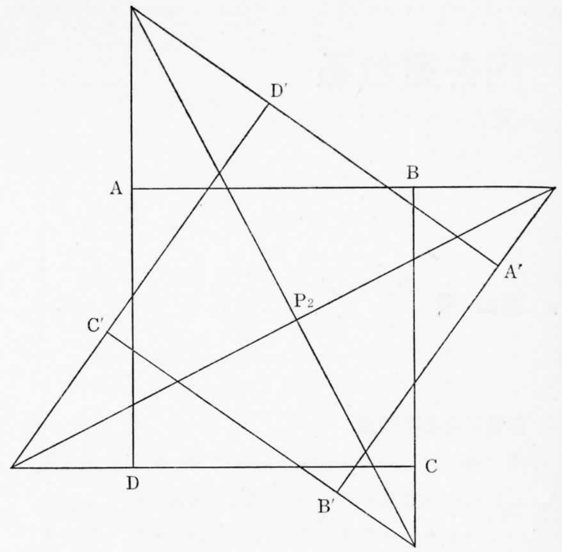

図 7

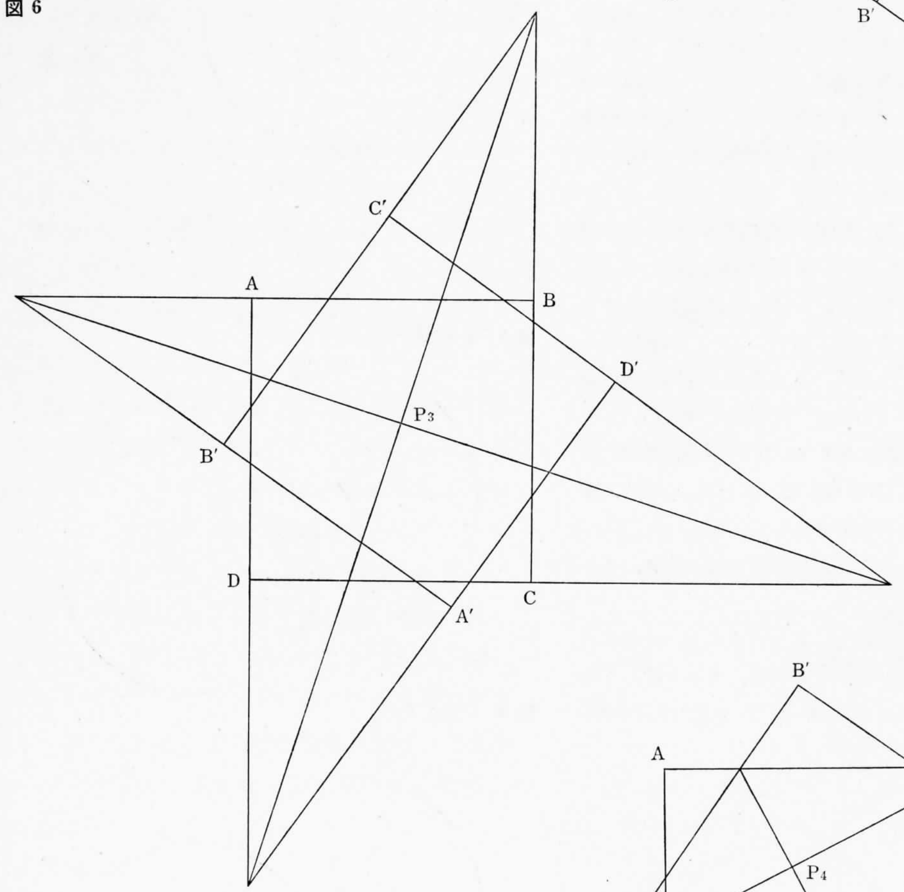

図 8

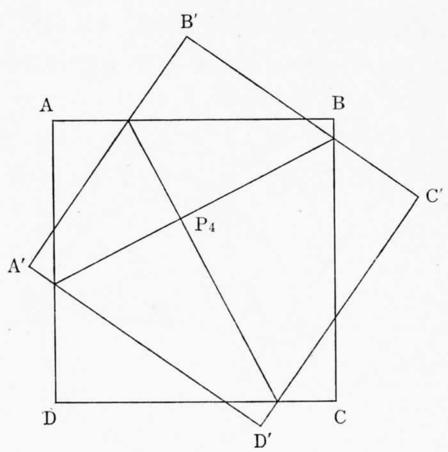

図 9

O を通る線分 AB が，点 P を軸にして，同じく円の中心 O′ を通る線分 A′B′ に移されることで理解できます．この場合，

$$PA = PA', \qquad PB = PB'$$

の関係が保たれています (図 5).

私は，以前に正方形を重ねる問題について論じました(『数学セミナー』1982 年 2 月号および 8 月号；『卵はなぜ卵形か』に収録)．合同な正方形を重ね合わせるには，各辺の交点から 2 本の交線を引き，その交点を指で押さえて回転すれば 2 つの正方形は完全に重なります．この 2 本の交線は直交していること，不動点は正方形の対称性から 4 個あること，そして，どうしてこのようにすれば不動点がうまく見つけられたのかについても説明しました．つまり，「ランダム・ドット・パターン」を紹介しました．

不動点を見つけるには，点群がランダムになっていなければならず，規則的に並んでいると，いくつもの同心円ができてしまうことなど．

このパターンは，最近のパーソナル・コンピュータを使えば BASIC のグラフ機能で容易に手にすることができます．画像の精度が良くなったためです．

2. 不動点は一直線上に並ぶ

今回は，その続きということでもう少し理論を展開してみましょう．

正方形は，90 度回転対称です．つまり，90 度ずつ回転させると図は重なります．したがって，各辺がとる位置関係によって，4 通りの状態があることになり，合計 4 個の不動点が存在することになります．その状態を図 6 ～図 9 に示しました．不動点は，$P_1 \sim P_4$ になります．図 6 と図 9 は，比較的，作成しやすいのですが，図 7 と図 8 は，少し工夫がいります．AB と A′B′ との交点は，図だけでは交わらないため，線分 AB と線分 A′B′ の延長線の交点として求められます．他の交点も同様です．

このようにして求められた 4 つの不動点 $P_1 \sim P_4$ について，その位置関係について考えてみることにしましょう．

結論から言いますと，この 4 つの不動点は，一直線上に並ぶのです．

このように言いますと，なにか幾何学の一大定理を発見したのでは，という錯覚におちいりますが，よく考えてみると，そうでもないのに気づき，がっかりします．

友人には，なぜ一直線に並ぶのかの理由はいわず，ただその現象だけをいうと，ちょっとした優越感にひたることができます．「どうして，どうしてなの，教えて！」と．

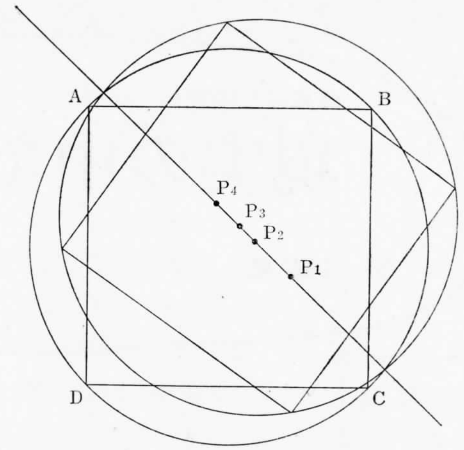

図 10　不動点は一直線上に並ぶ

正方形に外接する円をおのおの描いてみます．そして，その円の交線を引いてみます．すると，4 つの不動点はこの交線上に並ぶのです (図 10).

正 4 角形の場合は不動点は 4 個，正 8 角形の場合は不動点は 8 個，一般に，正 n 角形の場合は不動点は n 個になります．円は，正 n 角形の系列でいいますと，n が無限大，つまり辺の数が無限大になるときですから，不動点が無限にあることになります．

これで，ここに円を重ねる問題と，正多角形を重ねる問題の統一がなされたことになります．

(にしやま ゆたか／大阪経済大学)