カードの隅切り

（表紙のつづき）

西山 豊

●置換の式で表わすと

カードの隅切りは，対称図形を非対称化することによって，大きな役目を果している．隅切りの位置が，現在どの位置にあるかを知ることによって，左右反転，上下反転または180度回転で正しい位置関係に戻すことができる．そこで，カードの四隅に記号 A, B, C, D をふってこのことを考えてみよう．

図3に示すように，最初の正しい位置を (1) の状態，(1) を左右反転した場合を (2) の状態，(1) を上下反転した場合を (3) の状態，(3) を左右反転した場合を (4) の状態とする．(4) は (2) を上下反転してもよいし，(1) を180度回転してもよい．また，(2) と (3) は180度回転の関係にもなっている．

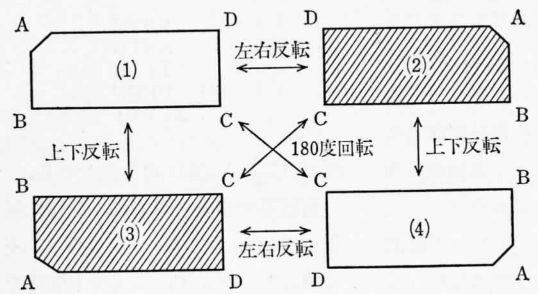


図3 長方形のカード

以上のことは，線形代数の置換の問題としても説明される．(1) から (4) までを式で示してみる．

(1) の状態

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

これは，移動しないから，恒等置換である．

(2) の状態

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = (A\ \ D)(B\ \ C)$$

これは，左右反転であるから，辺 AD と辺 BC が反転されていて，互換である．

(3) の状態

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = (A\ \ B)(C\ \ D)$$

これは，上下反転であるから，辺 AB と辺 CD が反転されていて，互換である．

(4) の状態

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = (A\ \ C)(B\ \ D)$$

これは，180度回転であるから，長方形の対角点 AC, BD が反転されていて，これも互換である．(4) の場合は，置換の積としても理解される．つまり，

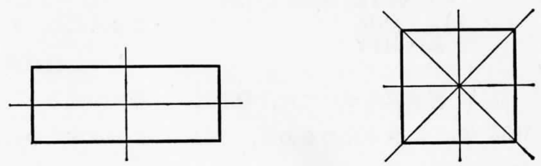
$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

が成り立つ．(1)→(2) は左右反転の操作，(1)→(3) は上下反転の操作，(1)→(4) は180度回転の操作である．180度回転は，上下反転と左右反転の2回の操作を行なえばよい．この場合，上下反転と左右反転の順序（置換の積の順序）は結果に関係しない．

●正方形のカードでは

カードは，一般に長方形であるが，もう少し議論を進めて，正方形のカードのことについても考えてみよう．

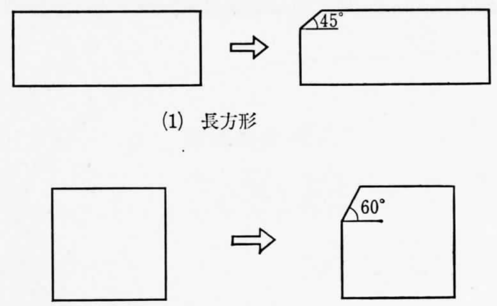
長方形の場合は，対称軸は2本であるが，正方形の場合は，対称軸は4本ある（図4）．だから，その分だけ位置関係が増えてくる．



(1) 長方形　(2) 正方形

図4 対称軸

位置関係を正しく認識するには，カードの隅切りが重要な役目を果していた．正方形の場合，隅切りを長方形の場合と同等に考えると，不都合が生ずる．例えば，隅切りの角度を45度にすると，位置関係の判別がつかないケースがある．そもそも，隅切りは，対称図形を非対称化することが目的であったから，隅切りの角度を60度などにすればよい（図5）．これで十分である．



(1) 長方形

(2) 正方形

図5 非対称化

さて，正方形の場合の位置関係であるが，長方形の場合の倍，すなわち8通りある．それを図6に示す．左右のグループは，全体として裏返しの関係になっている．

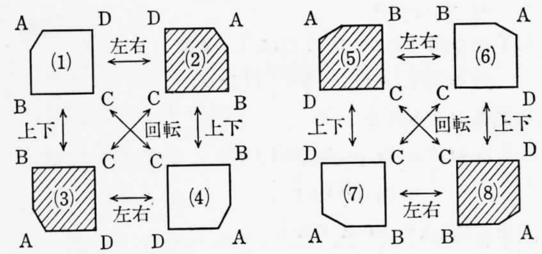


図6 正方形のカード

この8通りの位置関係を，もっと有機的に関連づけるためには，図7のように，立体配置を考えればよい．3次元の座標系を設定し，(1) の状態を原点にもってくる．xy 平面に並行に (1)～(4) の状態のグループと，(5)～(8) の状態のグループを配置する．

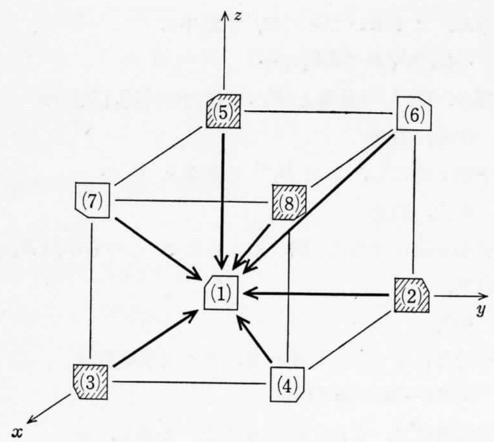


図7 立体配置

(1)～(8) の状態は，ちょうど，立方体の8つの頂点に位置すると考えてよい．任意の頂点間は，直線で結ぶことができる．と同時に，任意の2つの状態は，1回の操作で重ね合わせることが可能なのである．そのことを示すために，(2)～(8) の状態から (1) の正しい状態にもってくる操作の方法を列挙しておこう．

(2)→(1) 左右反転
(3)→(1) 上下反転
(4)→(1) 180度回転
(5)→(1) AC を軸に反転
(6)→(1) 反時計回りに90度回転
(7)→(1) 時計回りに90度回転
(8)→(1) BD を軸に反転

ここに，(6) と (7) の状態は (1) の巡回置換となっている．

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = (A\ \ B\ \ C\ \ D)$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = (A\ \ D\ \ C\ \ B)$$

置換の式だけからみると，正方形の場合，もっと他にも位置関係があるのではと思うが，8通りしかない．これは，頂点 ABCD がこの順に並んでいなければならないからである．この条件がくずれると，ねじれた正方形ができることになる．

（にしやま ゆたか／大阪経済大学）