拡大・縮小

西山 豊

1. 任意倍率は可能か

今は，コピーの全盛時代である．ひと昔まえまでは，コピーを1枚とるにしても，結構高くついたので，慎重になったものである．ところが，技術革新の恩恵で，ハードウェア価格が急低下し，学生街なら1枚8円という店屋も出現し，さらに，コピー機そのものを個人が購入できる時代となった．このコピーに対する気軽さが，情報を氾濫させている一因にもなっているのだが．

最近のコピー機は，価格においてもさることながら，機能面では非常に充実している．用紙のサイズは大小さまざまが使える．自動給紙機構，ソーター付き，両面コピー，カラーコピー，OHP フィルムコピー等々．中でも拡大・縮小のズーミングが可能になった．今までは等倍率であったが，A4 から B4 への拡大，B4 から B5 への縮小などができるようになった．

先日，あるレポートを作成していたところ，図がどうしても大きく，現寸の 80％ 大のものが欲しいということになった．私の使っていたコピー機は，現寸の 64％ から 142％ の 1％ 刻みの拡大・縮小が可能であった。これを使えば，いとも簡単に作成できるはずだが，もし下位機種なら，このような 1％ 刻みの拡大・縮小機能はついていないであろう．A4 から B4，B4 から B5 などの定型の拡大・縮小パターンを駆使して，現寸の 80％ 大のコピーを完成したい，というのが今回のテーマである．

いくら技術が進んだとはいえ，コピーを何回もくり返せば，鮮明度は低く，汚くなる．だから，これから説明する事柄は，単なる数学上の遊びであって，実用とはまったく無関係であることを断わっておく．

2. A 列と B 列

ここで，紙の寸法について説明しておこう．JIS 規格によれば，A 列と B 列の 2 種類がある．面積が 1 平方メートルを A0 とし，その半分を A1，またその半分を A2 とするのが A 列で，面積が 1.5 平方メートルを B0 とし，その半分を B1，またその半分を B2 とするのが B 列である．A 列，B 列の寸法を 0 番から 6 番までを表 1 に示す．また，これを図の関係として表わしておく(図 1)．

A 列と B 列に共通していえることは，これらは相似図形であることである．たとえば A1 と A2 の関係について，図 2 に示すように長方形 ABCD を A1 サイズ，長方形 FEBC を A2 サイズの用紙とすれば，相似の関係から，

$$AD : AB = FC : FE$$

となり，いま AB の AD に対する比率を未知数 x とすると，

$$1 : x = \frac{x}{2} : 1$$

となり，これを解いて，

$$x = \sqrt{2}$$

を得る．これが相似であるための必要十分条件である．

表1 JISによる紙の仕上寸法 (単位mm)

A 列	番	B 列
841 × 1189	0	1030 × 1456
594 × 841	1	728 × 1030
420 × 594	2	515 × 728
297 × 420	3	364 × 515
210 × 297	4	257 × 364
148 × 210	5	182 × 257
105 × 148	6	128 × 182

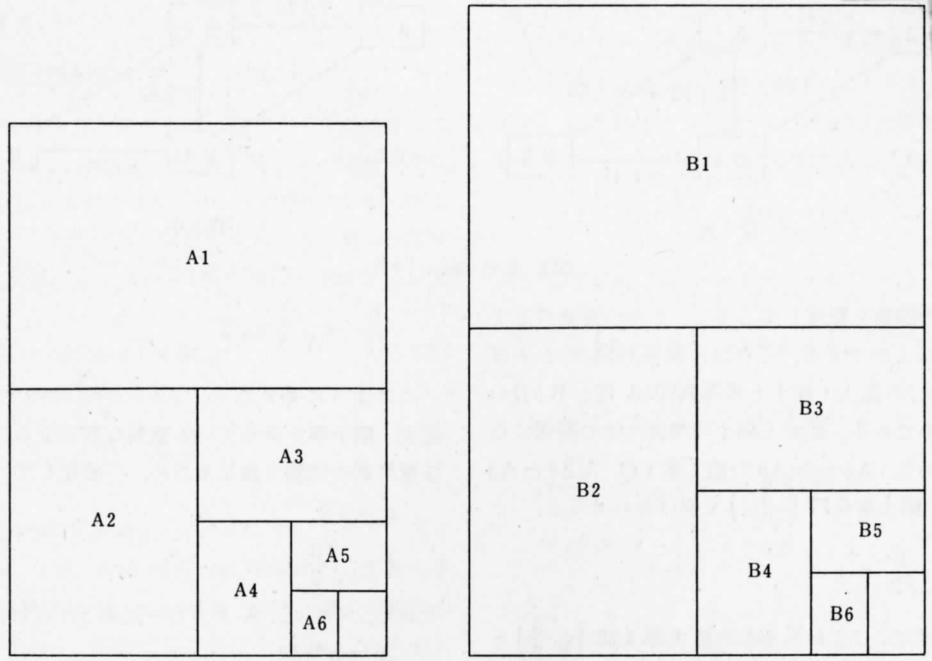

図1 A列とB列

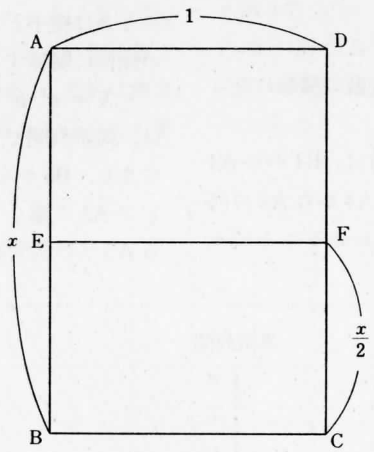

図2 相似図形

横と縦の比率が $1 : \sqrt{2}$ となることを以上のようにして求めたが，面積比から考えてもよい．A1 の面積は A2 の 2 倍である．相似図形どうしの面積は，辺の長さの 2 乗に比例する．面積が 2 倍であるから，辺は $\sqrt{2}$ 倍になっている．だから横と縦の比率は $1 : \sqrt{2}$ である．

この考え方は，A 列と B 列の関係にも適用される．番号が同じで，A 列と B 列の面積比は 1 : 1.5 である．だから辺の長さの比率は $1 : \sqrt{1.5}\left(1 : \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ となる．B 列は A 列に比べて，面積比で 50％，辺の比で 22％ 大きい．

3. $X = a^m \cdot b^n$

あるコピー機に，次のような拡大・縮小のズーム機能があった．A4 から A3，B5 から B4 の 1.41 倍，A4 から B4 の 1.22 倍，B4 から A3，B5 から A4 の 1.15 倍の拡大と，A3 から A4，B4 から B5 の 0.71 倍，B4 から A4 の 0.82 倍，A3 から B4，A4 から B5 の 0.87 倍の縮小のパターンである(図 3)．

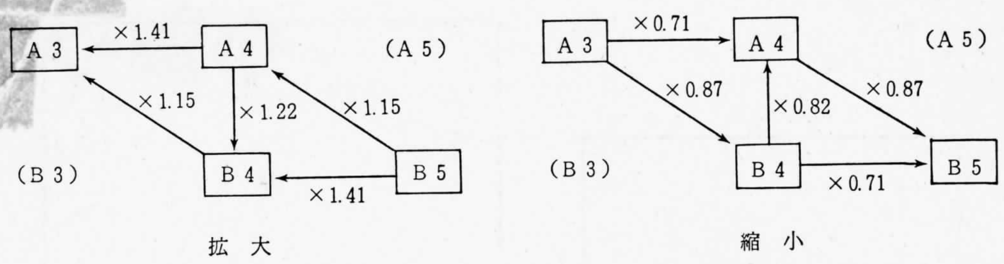

図3 拡大・縮小パターン

これらの関係を整理してみると，2つの要素にまとめあげることができる．それは，同系列間(たとえばA列どうし)の拡大・縮小と異系列間(A列とB列)の拡大・縮小である．拡大と縮小の関係は逆の関係になっているから，A4からA3の拡大率1.41 ($\sqrt{2}$)とA3からA4の縮小率0.71 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$を掛けあわせると，

$$\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$

となる．また，A4からB4の拡大率1.22 $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$とB4からA4の縮少率0.82 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$を掛けあわせると，

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=1$$

となる．だから，拡大率と縮小率は逆数の関係になっている．

B4からA3への拡大率1.15 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$は，B4からA4の異系列間の縮小率0.82 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$と，A4からA3の同系列間の拡大率1.41 ($\sqrt{2}$)を掛けあわせることによって得られる．

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{2}$$

このように考えると，$\sqrt{2}$と$\sqrt{\frac{3}{2}}$の2つの数値が拡大・縮小率を決めている重要な数となる．ここで，任意倍率の問題を論じるため，一般化して，

$$a=\sqrt{2}$$

$$b=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

とおく．そして，Xをコピー比率とすれば，

$$X=a^m\cdot b^n \qquad (1)$$

となる．ここに，m, nは整数で，正のときは拡大，負のときは縮小となる．mは同系列間の，nは異系列間の操作に関係する．たとえば，

$$X=a^2\cdot b^{-1}$$

は，同系列間で2回拡大し，異系列間で1回縮小する，つまり，B5からスタートするとB4, B3へ拡大し，そしてA3に縮小することになっている(図4)．B5からA3への拡大率は1.63である．

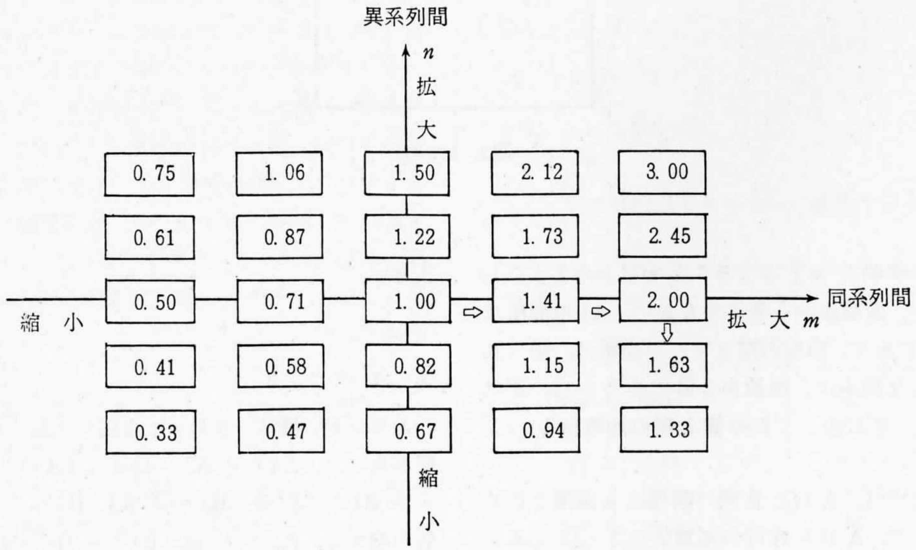

図4 $X=a^m\cdot b^n$ $\left(a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{\frac{3}{2}}\ ;\ m,\ n は整数\right)$

4. 有理数と無理数

さて，この稿の主題である，倍率が0.8の場合のことを考えてみたい．(1)式において，$X=0.8$を満たす整数mとnを見つけるのが，この解である．mとnの2次元の無限平面を設定すると，その解は存在するであろうか．そこで，(1)式の両辺にlogをとってみる．

$$\log X = m\log a + n\log b \qquad (2)$$

そして，mとnの関係式にしてみると

$$n=-\frac{\log a}{\log b}m+\frac{\log X}{\log b} \qquad (3)$$

となる．

(3)式を倍率Xが0.5から1.5についてグラフ化すると図5になる．nはmの一次関係式として表わされ，傾きは負である．nとmは，拡大・縮小の操作の回数であるから，整数でなければならない．したがって，これは整数解を求める問題でもある．

ところで，aは$\sqrt{2}$，bは$\sqrt{\frac{3}{2}}$であった．またlogをとっているので，(3)式の傾き，切片ともに無理数である．したがって，左辺は有理数(整数)，右辺は無理数となり，厳密に言えば，この式を満たす(m, n)の整数解は存在しないことになる．

そこで，少し条件をゆるめて，倍率Xを$X\pm\varepsilon$ ($\varepsilon=0.01$または0.001)の範囲内とし，それで解を求めてみる．図5の中で黒丸で示したのは，許容誤差εを0.01としたときに満たされる解である．つまり，

$$(\sqrt{2})^{-2}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^0=0.500=0.5$$

$$(\sqrt{2})^{-1}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^0=0.707\fallingdotseq 0.7$$

$$(\sqrt{2})^{-3}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4=0.796\fallingdotseq 0.8$$

$$(\sqrt{2})^{0}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^0=1.000=1$$

$$(\sqrt{2})^{-1}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=1.299\fallingdotseq 1.3$$

$$(\sqrt{2})^{0}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=1.500=1.5$$

となる．

指定倍率Xと許容誤差εを入力して，mとnの整数解をみつけるプログラムを作成してみた．$X=0.8$，$\varepsilon=0.01$とし，$-100\leqq m\leqq 100$について解を探してみると25個みつかった(表2)．約1割の確率である．これは許容誤差εの与え方に関係するのだろう．εをもっと小さくし，探索する2次元平面を無限に広げれ

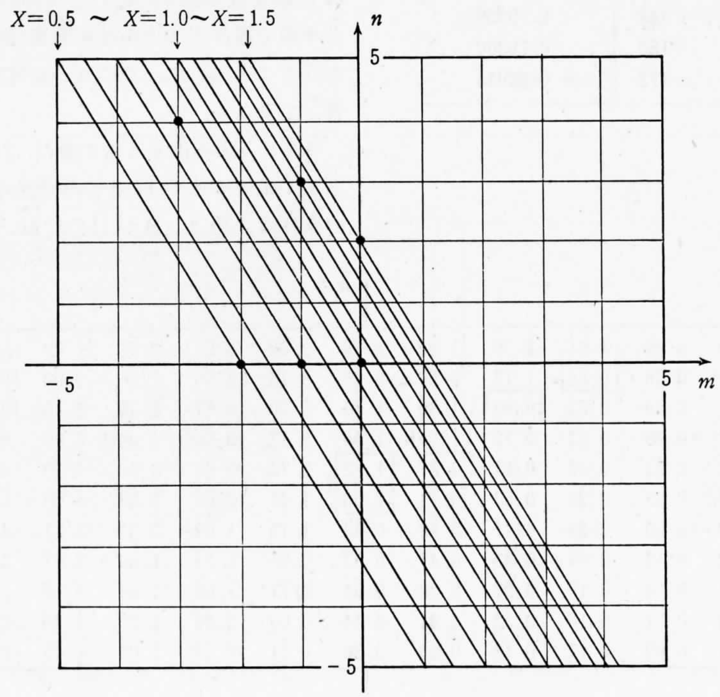

図5 $n=-\frac{\log a}{\log b}m+\frac{\log X}{\log b}$ ($X=0.5\sim1.5$についてのグラフ)

表2 倍率が0.8 ± 0.01の場合の整数解

$\left(倍率=(\sqrt{2})^m\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^n\right)$

	指定倍率		0.80
	許容誤差		0.01
	m	n	倍率
1	−96	163	0.79800
2	−89	151	0.79261
3	−79	134	0.80804
4	−72	122	0.80258
5	−65	110	0.79716
6	−58	98	0.79178
7	−48	81	0.80719
8	−41	69	0.80174
9	−34	57	0.79633
10	−27	45	0.79095
11	−17	28	0.80635
12	−10	16	0.80090
13	−3	4	0.79550
14	4	−8	0.79012
15	14	−25	0.80551
16	21	−37	0.80007
17	28	−49	0.79466
18	45	−78	0.80466
19	52	−90	0.79923
20	59	−102	0.79383
21	69	−119	0.80929
22	76	−131	0.80382
23	83	−143	0.79839
24	90	−155	0.79300
25	100	−172	0.80844

ば，真の倍率 $X=0.8$ に限りなく近づく整数解が見つかるであろう．

$X\fallingdotseq 0.8$ となる原点から一番近くにある値は，$(m, n)=(-3, 4)$ であった．これを完成させるには，同系列間の縮小を3回($m=-3$)，異系列間拡大を4回($n=4$)操作すればよいが，図3に示したようにA3からB4への経路を応用すると，合計が4回の操作でよいことになる．つまりA4からB4に拡大し(→1.22)，その図をA3からB4の比率を3回適用して縮小すれば(→1.06→0.92→0.80)，私の希望した倍率0.8に到達する(図6)．

5. 枡のパズル

以上のように，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{\frac{3}{2}}$ の拡大・縮小比率さえあれば，これを組み合わせることによって任意の倍率にコピーできることがわかった．この問題は，坪井忠二『数理のめがね』(岩波書店)の中に「枡のパズル」(p 67〜p 80)というのがあって，このパズルに類似しているので，ここに紹介しておこう．

2つの枡A，Bがある．Aの容積は$11l$，Bの容積は$7l$である．そして，そばに大きなタンクがあって，水がいっぱい入っている．この2つの枡だけを使って，$2l$の水を汲み出せ，というのである(図7)．どのような手順で汲み出すのかは前著書(図解入り)を読んでいただくことにして，このことが可能であることだけを言っておこう．

さらに，汲み出せる水の量は，$2l$だけでなく，$1l$から$11l$までの水が$1l$きざみで汲みとれる．このための条件は，枡A，Bが$11l$と$7l$というように互いに素であることが必要なのである．枡A，Bが$8l$と$6l$であれば，測りとれる水の量は，2の整数倍に限り，$1l$は不可能であるという．

枡のパズルにおける枡A，Bは，本稿の拡大・縮小比率 a, b に対応している．a と b は無理数であり，互いに素であるから，これさえあれば任意の倍率にコピーできるのである．

(にしやま ゆたか／大阪経済大学)

0.49	0.69	0.97	1.38	1.95	2.76	3.90	5.51	7.79	11.02	15.59
0.40	0.56	$\boxed{0.80}$	1.13	1.59	2.25	3.18	4.50	6.36	9.00	12.73
0.32	0.46	0.65	$\boxed{0.92}$	1.30	1.84	2.60	3.67	5.20	7.35	10.39
0.27	0.38	0.53	0.75	$\boxed{1.06}$	1.50	2.12	3.00	4.24	6.00	8.49
0.22	0.31	0.43	0.61	0.87	$\boxed{1.22}$	1.73	2.45	3.46	4.90	6.93
0.18	0.25	0.35	0.50	0.71	$\boxed{1.00}$	1.41	2.00	2.83	4.00	5.66
0.14	0.20	0.29	0.41	0.58	0.82	1.15	1.63	2.31	3.27	4.62
0.12	0.17	0.24	0.33	0.47	0.67	0.94	1.33	1.89	2.67	3.77
0.10	0.14	0.19	0.27	0.38	0.54	0.77	1.09	1.54	2.18	3.08
0.08	0.11	0.16	0.22	0.31	0.44	0.63	0.89	1.26	1.78	2.51
0.06	0.09	0.13	0.18	0.26	0.36	0.51	0.73	1.03	1.45	2.05

n, m

図6 倍率0.8への経路

森の中の道(表紙の答)

森の中の道は上図のようになっています．どの広場から出発しても，離れ離れになった直後なら2人は再会する方法があります．しかし，A(あるいはC)から出発してBとDに2人がそれぞれいるなら，再会することはもはや不可能です．

迷路の任意の点xから出発した2人がy, zで離れ離れになっても，うまく道を選べば再びある点wで合流できるなら，この迷路はチャーチ・ロッサ(Church-Rosser)の性質をもつといいます(図3)．一方，任意の点xから出発した2人が，離れ離れになった直後ならある点wで合流できるとき，この迷路は弱チャーチ・ロッサの性質をもつなら，弱チャーチ・ロッサの性質をもつことは自明です．しかし，その逆は成立しません．図2は弱チャーチ・ロッサの性質をもつにもかかわらず，チャーチ・ロッサの性質はもたない例になっています．

(とやま よしひと／NTT基礎研究所)

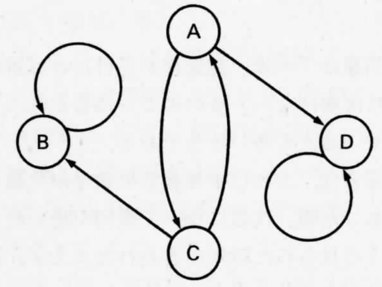

図2.

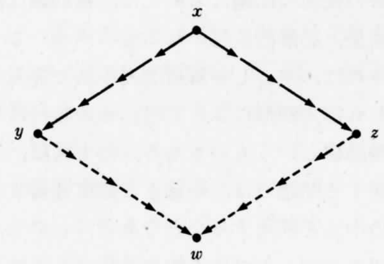

図3. チャーチ・ロッサの性質

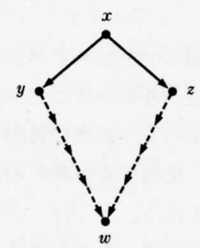

図4. 弱チャーチ・ロッサの性質

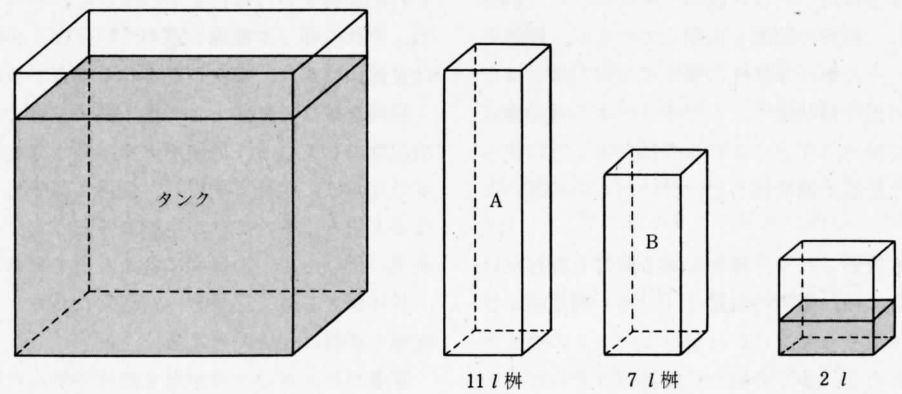

図7 枡のパズル