

解答◎西山 豊・高木茂男 【出題8月号】

解答

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = 1$$

ただし、 a_i は自然数で、 $2 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 99$ とするとき、 n が最大となる場合を求めよ。

例) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

今年の3月、関西系のABCテレビに「どんなかな予備校」という番組があって、それに出演したタレントに数学の問題を解かせる機会がありました。この番組を視聴されていた大阪市の藤江宏史氏から手紙をいただき、氏の問題をいっしょに解く中で、意外な答えに到達することを知り、「これはぜひ『数学セミナー』の読者に」と思い、出題することになりました。

あとで触れますが、この出題が「エレガントな」に適しているかどうか疑わしいですが、解の意外性から本欄に絶え得るものと判断しました。

本問に対する解答は全部で51通で、内訳は10代5人、20代7人、30代16人、40代8人、50代6人、60代以上8人、その他1人でした。

求めた項の数 n の一覧表は次の通りです。

n	解答者	%
42	13人	25.5
30~40	13人	25.5
20~29	4人	7.8
10~19	4人	7.8
~9	17人	33.3

解答の分布は、 $n=9$ まで、 $n=40$ まで、 $n=42$ の3つのグループに分類されます。

分数の表記が面倒なので、次のように書きます。

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

の場合は、

$$1 = (2, 3, 6)$$

のように分母のみをカッコに入れます。

$n=9$ を正解とした答案の一例は、

$$1 = (3, 5, 6, 9, 15, 18, 30, 45, 90) \quad \textcircled{1}$$

です。文字式を駆使して展開された方は「エレガントな解答」にこだわったためか、ここで止まってしまうケースが目立ちました。数学はもともと泥臭いものから出発したことを思い出してください。

①式は、この問の1つの壁です。これを突破することが大切です。私も早合点して、これが最大数であると思っていました。しかし、藤江氏の指摘で解は一気に急展開したのです。

パズルは紙と鉛筆で解くことが鉄則でありますし、解いていく過程がもっとも楽しいものです。コンピュータで解いてもよいのですが、楽しみが半減します。コンピュータといってもそう簡単にプログラムは書けないと思います。根気良くやれば1ヶ月は持ちます。

答えは、試行錯誤的に求めるのがオーソドックスなようです。①式において

$$(3) = (4, 12)$$

$$(6) = (7, 42)$$

のような2項分解でおきかえると、

$$1 = (4, 5, 7, 9, 12, 15, 18, 30, 42, 45, 90) \quad \textcircled{2}$$

で、 $n=11$ となります。2項分解を繰り返して

$$1 = (8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 22, 27, 30, 35, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 60, 72, 90, 99) \quad \textcircled{3}$$

の $n=22$ あたりまで持っていきます。③式において

$$(8) = (24, 24, 24)$$

$$(10) = (17, 34, 85)$$

$$(14) = (28, 44, 77)$$

のような3項分解でおきかえ、2項分解と組み合わせると、

$$1 = (15, 17, 20, 21, 22, 26, 27, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 75, 76, 77, 78, 80, 84, 85, 88, 90, 91, 95, 96, 99) \quad \textcircled{4}$$

の $n=42$ の解に到達します。

$n=42$ に対する答えは何通りかあるようです。た

例えば、上の解で

$$(15, 30, 90) = (18, 24, 72)$$

のように置き換えると、

$$1 = (17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 60, 63, 66, 70, 72, 75, 76, 77, 78, 80, 84, 85, 88, 91, 95, 96, 99)$$

となります。

$n=42$ まで求めた方は13人でした(東京都・ ζ 、三鷹市・広瀬昌一、宇和島市・カッパー、奈良市・辰巳行平、横浜市・吉川悦郎、新潟県・与板くん、新潟県・原幸仁、福岡県・森茂、愛知県・山北一三、姫路市・山本和充、名古屋市・小谷充弘、川崎市・古川新、東京都・井上允彦)。

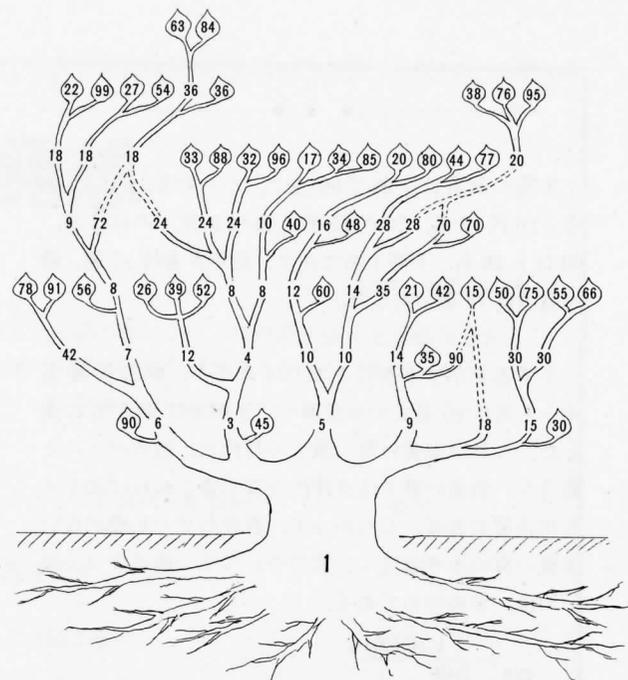
この中で、 $n=42$ が最大であると証明または証明に挑戦してくださったのは、 ζ 、カッパー、与板くん、山北一三の各氏です。また、 $n=42$ に解が27通りあると分類したのは森茂氏です。これは、もう少し検討の余地があるので保留しておきます。

ここまで到達しなく、時間切れという方の名前を上げておきます。 $n=40$ (神奈川県・田中早穂子、京都市・井上義和)、 $n=39$ (山形市・長澤義博)、 $n=38$ (蕨市・金シ開4田)、 $n=36$ (盛岡市・遠山勝治、観音寺市・香川小三元、東京都・松山新吾)、 $n=35$ (吹田市・山本正行、市川市・川崎市雄)、 $n=34$ (富田林市・加羅巖、松戸市・広川久晴、調布市・高野知明)、 $n=32$ (東京都・志村賢一)。

解答者の感想で、次のようなコメントがありました。「時間をとられたが面白く、楽しい1ヶ月だった」「エレガント こたえのみでは どうだろう」「小生の予想を大幅に上まわり、美事故提出」「数学を趣味とする主婦です。今月号の問題は私にも手が付けられそうでしたので挑戦してみました」「実を申し上げますと、この問題に接したのは検査のため入院する1日前のことでした。入院してからは紙と鉛筆だけで、ここまでやってきました。解答の是非は別として入院中の退屈しのぎに絶好の出題でした」

「 n の値が意外に大きいというのがいつわらぬ感想である」

このような感想をいただくと、出題した甲斐があったと思っています。今のところ求まっている最大数 n



= 42 に到達しない人は自分で解いてみてください。また、これが最大なのかを検討し、そうでなければ記録を更新してください。

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)

解答

□の中に適当な数字を入れて(ただし各数の最高位には0を入れない)式を完成させる問題が虫食い算です。その中でも数字がまったく出ていない問題を完全虫食い算と呼びます。下の問題はその一例です。

一見手のつけようがなさそうですが、実はこの問題には大きな手掛りがあって、それが見つかればそう苦まらずに解くことができます。

ひとつこの問題に挑戦してみてください。

