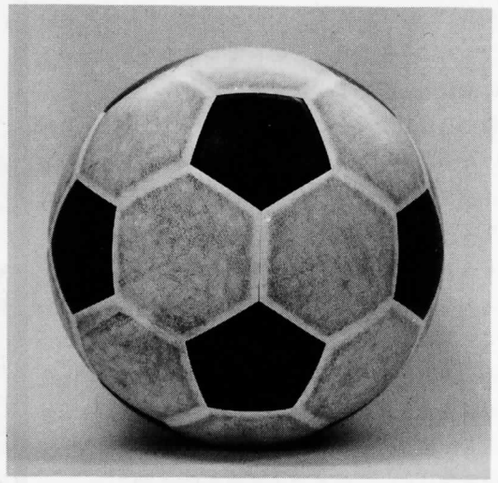
『数学セミナー』'94.9月号

エレガントな解答をもとむ Solution

出題6月号 …… 解答 西山 豊・永田雅宜

[解答] 1

サッカーボールは正5角形と正6角形の個数が合計32個でできています．そこで，写真を眺めながら，それぞれの個数をもとめてください．これは準正32面体を球面上に膨らませたものであり，答えはすぐに出るでしょうが，数学の定理を知らない，計算の苦手な文科系学生にもわかるような，ユニークな解答を期待します．



◆ ◆ ◆

解答者の数は全部で130名で，その内訳は10代18名，20代27名，30代44名，40代14名，50代8名，60代以上17名，不明2名であった．Jリーグなどのサッカーブームを反映してか関心度も高く，複数の解答を寄せられる方が多かった．でも女性の解答者が2名であったのは，まだまだ数学は「男もすなるもの」(土佐日記)なのかなあ．残念なことだ．

その反面，出題の意図が明確でないとの「抗議文」を書かれたり，この問題は有名私立中学の入試問題に出されたことがあるとか，市販の本に類題があるという指摘も何通かあった．

もちろん，私はこのことを知っていた．市販の本の解答は，正20面体の頂点をカットすればサッカーボールになるからとか，オイラーの多面体定理を用いての説明が大半である．「正多面体は中学校の数学の教科書に出ている」と言われればどうしようもないが，それをいつまでも記憶しているのは特別な人だけだ．正多面体を知らなかったら解けないのだ．

受験数学を終えた学生は「エックスイコール」と聞くだけで数学アレルギーを起こしてしまう．事態はそれだけ深刻だ．そんな人間なんか放っておけといえばそれまでだが，そこはそれ，なんとかしようというのが今回の出題である．

幸い，私の出題の意図を汲み取っていただき，多くの解答を得ることができた．中には32個が未知である場合と既知である場合に分類し問題を発展させた答案もあった．

解答パターンを多い順にグループ分けすると次のようになる．これらを順に紹介していこう．

1)	面・辺・頂点の数に注目したもの	101通
2)	多面体の知識を応用したもの	65通
3)	写真から数を予想したもの	14通
4)	位置関係を示したもの	11通
5)	分割して面積の比にしたもの	11通
6)	変形・切断・回転など	5通
7)	その他	4通
		計211通

[面・辺・頂点]

まず，オーソドックスな方法から，面や辺や頂点の数に注目したものがあげられる．この解答数がもっとも多く全体で101通あり，面の数に注目したものが48通，辺の数に注目したものが35通，頂点の数に注目したものが18通であった．

正5角形の数を x 個，正6角形の数を y 個とする．合計が32個だから，

$$x+y=32 \qquad (1)$$

となる．もうひとつの式をどのように導入するかが問題になる．

面の数に注目する考え方は次のとおりである．

まず1つの正5角形に着目する．1つの正5角形のまわりには5個の正6角形があるから，重複を許せば正6角形の数は全体で $5x$ 個になる．

一方，正6角形に着目すると，正6角形のまわりには3個の正5角形があるから，$5x$ は3度重複されて数えられたことになる．そこで，$5x$ を重複度の3で割れば正6角形の個数になり，

$$y=\frac{5x}{3} \qquad (2)$$

となる．これを解いて $x=12$，$y=20$ を得る．

辺の数に注目する考え方は次のとおりである．

正5角形のまわりにある辺の数は5本だから，全部で $5x$ 本ある．正6角形のまわりにある辺の数は6本だから，全部で $6y$ 本ある．ところが，正6角形には正5角形がひとつおきにしか隣接していないので，このうちの半分が正5角形のまわりの辺の数に等しくなる(図1)．つまり，

$$5x=\frac{6y}{2} \qquad (3)$$

となる．

頂点の数に注目する考え方は次のとおりである．

正5角形の頂点の数は5個だから，全部で $5x$ 個ある．一方，正6角形の頂点の数は6個だから，全部で $6y$ 個ある．ひとつの頂点に着目すると，正5角形が1個，正6角形が2個隣接している．正5角形の頂点の数 $5x$ は重複していないから，これが全体の頂点の数になる．正6角形の頂点の数 $6y$ は重複していて $5x$ の2倍になっている．つまり，

$$5x:6y=1:2 \qquad (4)$$

となる．

以上は，サッカーボールの面や辺や頂点の数に注目した模範解答であるが，なぜ3で割ったり2で割ったりするのか，数学の苦手な者には理解するまで時間がかかりそうだ．

[多面体]

次に多かったのは正多面体の知識から説明するもので，全体で65通あり，正20面体からの説明は40通，正12面体からの説明は14通，オイラーの多面体定理からの説明は11通であった．

正6角形の面をのばすと，正20面体になる(図2)．正20面体は20個の正3角形でできていて，頂点の数は12個である．頂点には5個の正3角形が隣接している．そこで，この頂点をカットすればサッカーボールになるというものだ．

また正5角形の面をのばす(この場合は正5角形は上下逆になる)と正12面体になる(図3)．したがって正5角形の数は12個であるというものだ．

さらに，多面体の定理としてよく知られているオイラーの定理

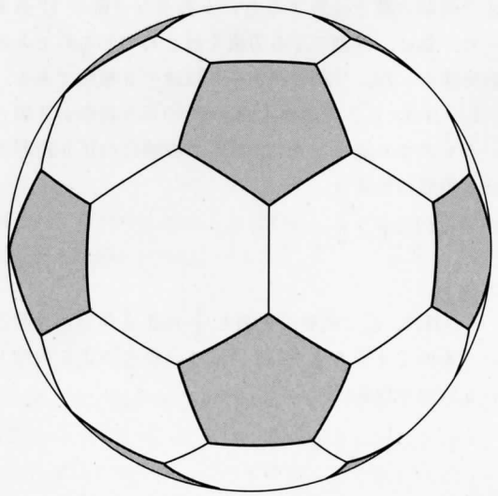


図1 辺に注目

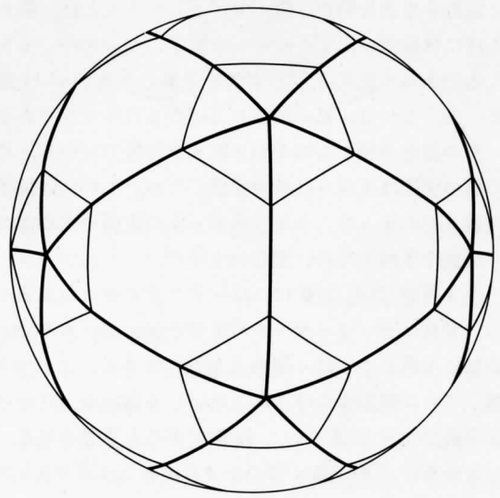


図2 正20面体

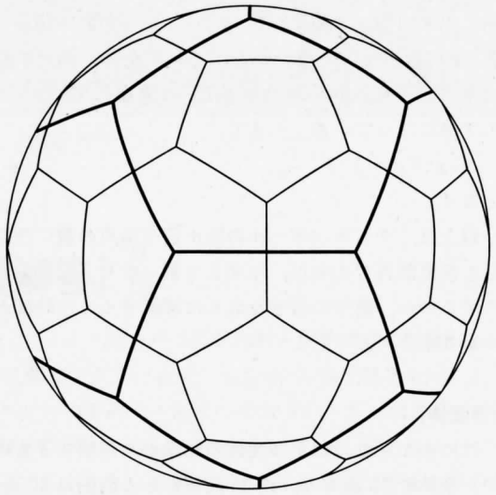


図3　正12面体

(頂点の数)＋(面の数)－(辺の数)＝2

を用いたものがあったが，この方法は問題を複雑にしてしまう傾向にあり，逆にオイラーの定理を説明しなければならない羽目に陥る答案もあった．説明が分かりやすくていねいなのでついつい納得してしまったが，今回の解答はこれを期待していない．

以上は，正多面体の知識がないと難しい．数学の苦手な者には，ちょっと説明し切れないのではないだろうか．

［予想］

意外と重要なのが，数え上げるということだ．数え上げには数式が出てこないが，数学のセンスのいるところである．数式を使わず数を予測したものが14通あった．これは，私が期待していたものの一つである．

月の裏を予想するのと同じような想像力がいる．月の裏の実際はアポロ計画で完成したが，これには長年の歳月がかかった．サッカーボールの表側を眺めながら裏側を予測するのは楽しいものだ．

正5角形(黒色)の数は，はっきり見えるのが4個ある．写真はサッカーボールの半分を写しているので，裏側にも同じように4個あると期待できる．これで8個．さらに周辺にかけらが3ないし4個ある．だから，正5角形の数は11ないし12個であると予想される．

ところが，「周辺に4個のかけらがあるはずだ」と決めてかかるのは，答えを知っている者の「勇み足」である．ここでは，8個以上16個以下と幅を持たせておいて，他の方法(前述)と組み合わせて12個に絞るほうがよい．

答案の多くは，そのような方法がとられていて，出題の「個数の合計が32個」を既知とした場合と未知とした場合に分けて証明した力作がめだった．

［配置図・展開図］

正5角形と正6角形の位置関係を配置図として説明した答案が7通あった．

長浜市・山内直隆さんは，サッカーボールを地球にたとえて，正5角形を北極点とした正距離方位図法による地図を示された．

これは，4色問題に出てくるゴムまりを引き伸ばしたような図であり，北極が中心に，南極が円の周辺にくる．図としてはユニークなものであったが，辺の長さが伸び縮みするので，はたしてこれで説明し切れるだろうかと疑問が残った．

また，サッカーボールを作るために展開図を示したものが4通あった．たしかに展開図にしたがえばサッカーボールは作れるが，出題の写真を眺めてこの展開図が正しく描けるかどうかは疑わしい．

展開図はいつも境界が問題になる．ぐるっとまわってどこでつながっているかの説明が難しく，答案のほとんどは，この説明がなされていなかった．

［分割］

サッカーボールの表面を合同なパターンで分割し，そのパターンを構成する要素の面積比から正5角形と正6角形の数を計算するという答案が全部で11通あった．私は，分割による方法をはじめて知るので大変興味深かった．分割のパターンは次の3種類である．

1つ目は，正6角形が1個と$\frac{1}{5}$の正5角形が3個というもので6通あった(図4)．この場合の正5角形と正6角形の比率は，

$$3\times\frac{1}{5}:1=3:5$$

となる．

2つ目は，正5角形が1個と$\frac{1}{3}$の正6角形が5個というもので4通あった(図5)．この場合の正5角形と正6角形の比率は，

$$1:5\times\frac{1}{3}=3:5$$

となる．

3つ目は，$\frac{1}{5}$の正5角形が1個と$\frac{1}{3}$の正6角形が1個というもので1通あった(図6)．この場合の正5角形と正6角形の比率は，

$$\frac{1}{5}:\frac{1}{3}=3:5$$

となる．

3図とも，図が見にくくなるので1個のパターンしか描かなかったが，読者は，このパターンでサッカーボールを覆いつくすことができることを確かめよ．

表面を合同な図形で分割して面積比に注目するという方法は，面や辺や頂点のときにあらわれた「重複」の処理がいらないので，意外と分かりやすいのではないだろうか．

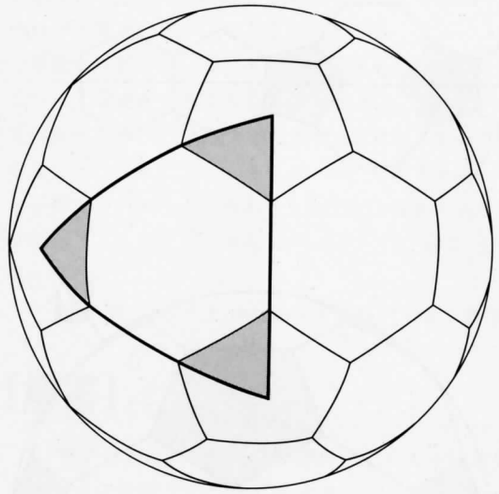


図4　分割パターン1

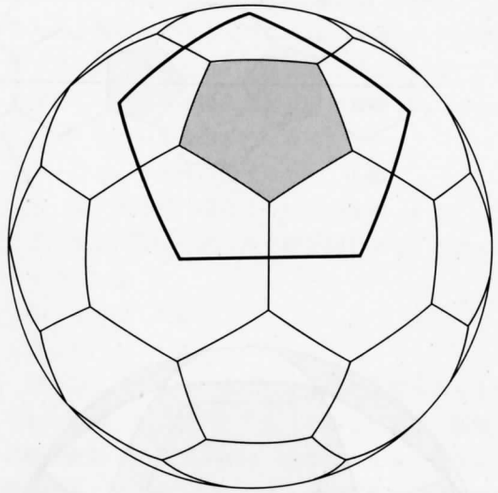


図5　分割パターン2

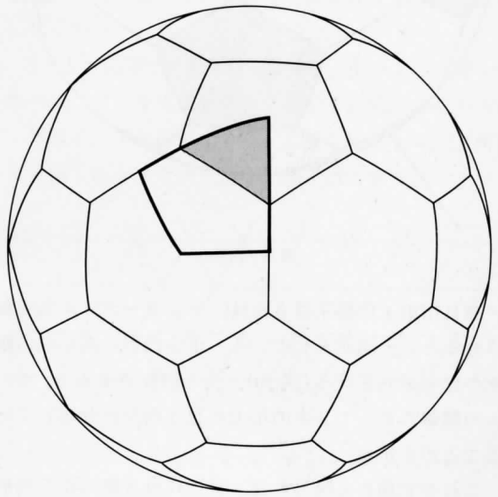


図6　分割パターン3

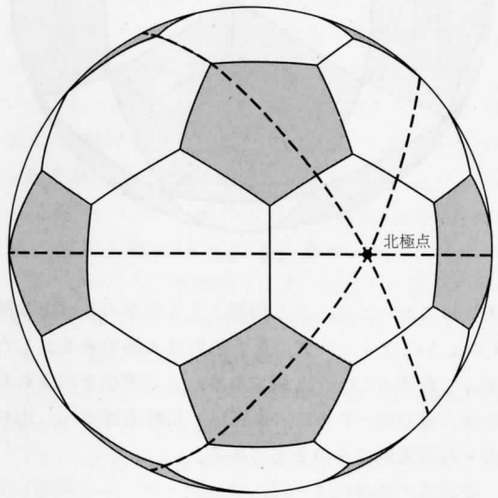


図7　切断

［切断・変形・回転］

サッカーボールを切断したり，変形したり，回転したりして求めるユニークな方法が5通あった．それらを紹介しよう．

ある1つの正6角形の中点を北極点とし，この正6角形の辺を二等分するようにサッカーボールを真二つに切る(図7)．その切り方は3通り存在するが，どの

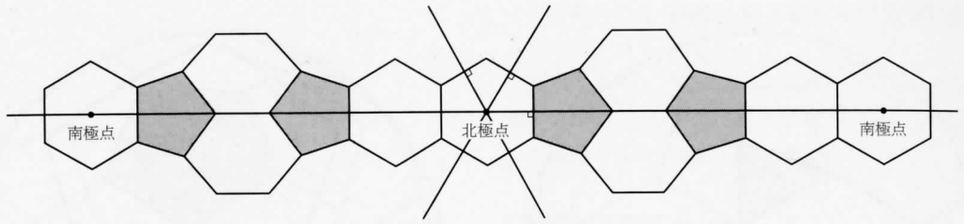


図8

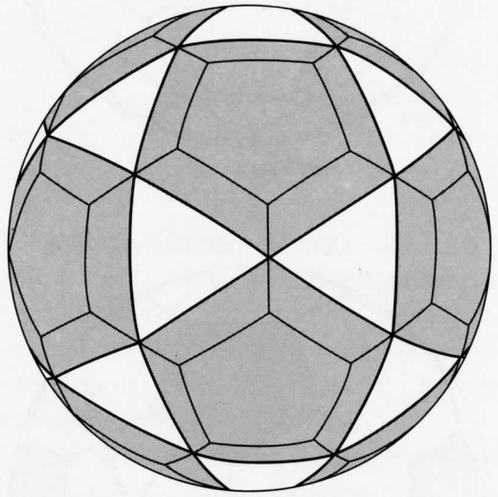


図9　変形

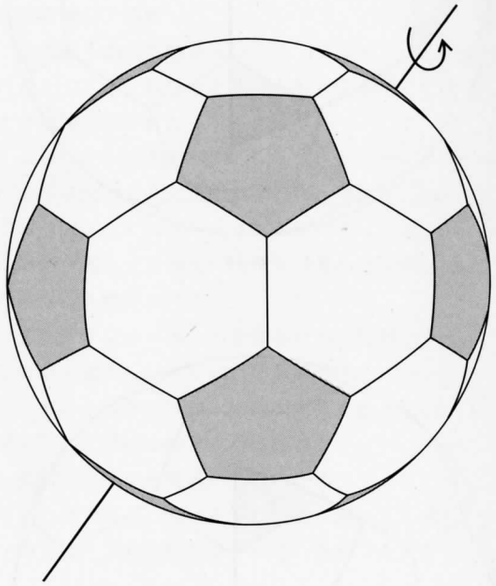


図10　回転

切り口においても，正5角形と正6角形の並び方は図8のようになっていて，正5角形は4個である．したがって合計 $4\times3=12$ 個である．この方法を示されたのは，東京都・ζさん，本庄市・川崎市雄さん，山口市・石田真也さんの3名である．

新潟県・原幸仁さんは，サッカーボールを変形していくという方法を示している．正5角形をどんどん大きくし，逆に正6角形をどんどん小さくして正3角形になってしまったとする(図9)．

この変形したサッカーボールの正5角形の数と正3角形の数は，元の正5角形と正6角形の数と同じである．すべての辺が正5角形の辺であると同時に正3角形の辺となっているので，正5角形の辺の総数と正3角形の辺の総数は同数である．だから正5角形と正3角形の数の比は3:5である．

これは，準正32面体には，正5角形が12個と正6角形が20個のもの以外にもあることを知った上での解答だろうか．とにかく鮮やかである．

四日市市・伊藤玉啓さんは，サッカーボールを回転させるという説明をしている．正5角形の真ん中に紐をつけてぶらさげる(図10)．少し回転させると，ボールの緯線にそって2本の帯上に正5角形が分布していることがわかる．

これを北極から眺めれば，帯上には5個の正5角形があり，北極とあわせて北半球に6個ある．南半球にも6個あるから合計12個である．この方法は，サッカーボールを手に触ってみないと実感できないが，結構面白い．

その他，イラストを入れたり物語風にして親しみやすくした答案が4通あった．これらすべての氏名を公表すべきところだが誌面の都合で割愛させていただく．悪しからず．

以上の答案で，どれが正解かというと，すべてが正解であるとしかいえない．ただし，どれが一番かというと，それは別問題である．読者がこれらの方法で，数学の苦手な友だちに理解させることができたなら，それが一番ということになるだろう．

最後に，私がサッカーボールに興味を持ったのは，じつはJリーグ人気より前のことである．「ヒトデの足はなぜ5本か」「人間の指はなぜ5本か」と想いを巡らしていたときに，サッカーボールの形に大きなヒントを得たのである．このあたりの話題に興味のある方は拙著『人とヒトデとサッカーボール』(三省堂)をご覧ください．

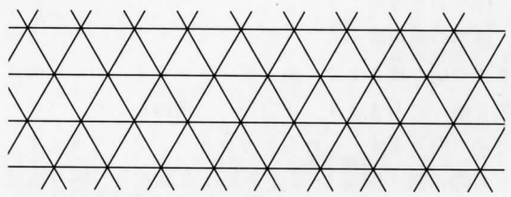
西山 豊(にしやま ゆたか／大阪経済大学，数学)

[解答] 2

1. 格子点とは，平面上で座標がいずれも有理整数である点を意味することにします．このとき，n 個 $(n \geqq 5)$ の格子点を頂点とする凸 n 角形の辺および対角線全部を書くと，頂点以外の格子点で，それらの辺または対角線の上にあるものが存在することを証明してください．

2. 上の問題で，格子点の意味を，次のように変えた場合は，どうなるかを考え，それを証明してください．

平面を，下の図のように，1辺の長さ1の正三角形に分割したときの頂点全体を格子点とする．



◆ ◆ ◆

応募者数は67で年齢別内訳は，10代6，20代7，30代31，40代12，50代4，60代以上7であった．そのうち1通(東京理大学生)は，きわめて単純な場合だけを論じているだけであり，証明したとは認められないものであった．2番について「1番と同じなのに，何か違いがあるのだろうか」と悩んだ旨の記載が2名(長野県・椎名建仁氏，金沢市・亀井明治氏)あったが，他方，1番だけの解答が3通あった．その他はエレガントでないものも含めて正解と考えた．

「1番と同じなのに」と悩まれた二人に弁明しておくと，「本質的にはまったく同じであるが，直線が3方向に並ぶことで，盲点になりうる」ということで，「同じなのだ」と気づくかどうかの問題として出題した．1番だけの解答が3通あったことは，出題したのは無意味ではなかったことを示していると感じている．

解答にコメントが添えられていたものもいくつかあったが，それらを分類したところ，

① 凸という条件に関するもの：9通，

② 高次元空間の場合についてのもの：4通，

③ 類似の問題を扱った文献を知らせてくださったもの：3通，

④ その他：3通

となった．

①の多くは凸という条件を外したら反例があるというものであった．凸という条件を外した場合，問題文の解釈次第で正しくもなり，誤りにもなる．そういう曖昧さをなくするために，凸という条件をつけて出題したのが実状である．この点について，福山市・平井孝幸氏は，凸の代わりに「どの3点も同一直線上にない」という条件をつければよい，また，座間市・ドン松五郎氏は，凸の条件を外しても「適当な2頂点を結ぶ線分が端点以外の格子点を通る」という意味で正しいとされた．どちらもよいコメントであり，上で「問題文の解釈次第で正しくなる」と書いたのは，このドン松五郎氏のコメントのとおりである．

②については，一般の d 次元の場合 $(n > 2^d)$ が2通，3次元の場合 $(n > 8)$ が2通あった．

③については，愛知県・山北一三氏が一番多く書いてくださった．それは次の4文献である．

(1) 1971 Putnam Exam；

(2) L. C. Larson, *Problemsolving Through Problems*, 1. 10. 1, Springer(1983)；

(3) 広島大教育学部1989年度後期入試；

(4) ピーター・フランクル，前原潤，『やさしい幾何学問題ゼミナール』，共立出版(1992)，p. 65.

山北氏のみでなく，お知らせくださった他の二人にも，厚く御礼申し上げます．

④のうち，ここでとくに紹介しようと思うのは，吹田市・上田安夫氏の「a, b が自然数でその最大公約数が $d(>1)$ であるとき，n 個 (ただし $n > ab$) の格子点が与えられれば，その中の適当な2個を結ぶ線分上に $d-1$ 個以上の格子点がある」ということと，その高次元への一般化である．

以上が寄せられた解答の概況である．

つぎに，出題者が用意した解答を示そう．