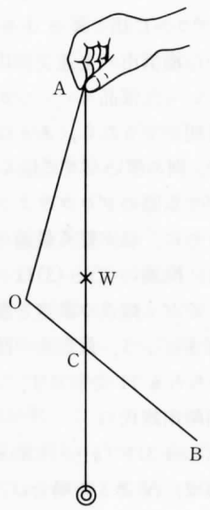
解答 2

ブーメランの重心を求める方法は，つぎの方法が知られています．一方の翼先を指でぶらさげ，その鉛直線上に糸を張ります．そして，もう一方の翼先からもぶらさげて糸を張ると，その交点が重心になります．

ブーメランを AOB とし，A でぶらさげたとき，その鉛直線との交点を C とします．このとき，左側の AOC と右側の CB の重さが，AC 上の重心 W でつりあっていることを示してください．AO と OB の長さが違う場合についても検討してください．



解答は 28 通で，内訳は 20 代が 3，30 代が 6，40 代が 10，50 代が 2，60 代以上が 7 であった．正解は 13 通，間違ってはいないが式が複雑であるのが 8 通，その他 7 通であった．過去 2 回の出題に比べて今回応募が少なかったのは，出題の意図が不明確であったのではと反省している．

ブーメランの重心は，回転の中心とも関係して重要である．重心といえば，高校の数学で学ぶ三角形の重心が基本的なものであるが，少し複雑な形になると大学の力学での重心の定義をまたねばならない．任意の三角形 ABC の頂点 A を指先でつまむと，その鉛直線上に重心がくるのは知るところである．ところが，この鉛直線は左右の面積を等分するものだと誤解することが多い．たまたま等分しているだけで，鉛直線を境にして，左右のモーメントが等しいのが重心の性質である．

ブーメランの重心を求めるとき，出題の図のようにするのであるが，ぶらさげた状態はどういう状態なのかに気づくのに，私は時間がかかった．鉛直線は面積を等分するという思い込みがあったからだ．

ブーメラン AOB の重心は，普通，AO と BO の重さを内分する点として求められる．これが W である．ぶらさげた場合は，まず AO と OC の重心から AOC の重心を求め，それと BC の重心から全体の重心を求める．このようにして求めた重心が，先の重心と一致するかを確認して欲しいというのが出題である．「証明せよ」とせず「示してください」としたのは，そのような理由であるからだ．

剛体の重心は一つしかなく，左右のモーメントは等しいに決まっているではないか．重心が鉛直線上にこなかったら単振動をする．わかり切ったことに何を答えよと言うのかと重心の一般的な説明をするものが 7 通あった．

では，なぜことさら問題にしたのか．それは，OC を求めるのが意外と面倒なのであるからだ．私が高校で学んだ数学は幾何学が消えた時代である(1964〜1966 年)．かわりに，解析的な方法が全面に出てきた．AW と OB の直線の方程式から交点 C を求め，OC の長さを求める．時間さえかければ必ず答えが出るという解析的手法は，今日のコンピュータの悪い発想にもつながるが，もっとすっきりした方法はないかと思ったのである．

幸いに，この含みを理解していただき，13 通の正解をよせていただいた．その代表的なものを 3 つ紹介しよう．

まず，大垣市の羽土隆さんによるベクトルによる解である．

$\overline{OA}=\overline{OB}=1$ のとき(図 1)．

$\overline{OC}=x\,(0<x<1)$ とし，OA, OC の中点をそれぞれ M, N とすると，AOC 部分の重心 W_1 は線分 MN 上にあり，重さは$1+x$，かつ MN // AC である．一方 CB 部分の重心はその中点 W_2 であり，重さは $1-x$ である．

全体 AOB の重心Wは AC 上にあり，AC と MN，W_2 との距離はそれぞれ x，$1-x$ に比例しているので，重心Wまわりのモーメントが等しいことから

$$(1+x)x=(1-x)^2$$

$$x+x^2=1-2x+x^2$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{3}$$

つぎに W まわりのつりあいの状態を示す(図 2)．

AOC 部分の重心の位置ベクトル $\overrightarrow{OW_1}$ は，AO の中点 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，CO の中点 $\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$ を，重さの反比 $x:1=1:3$ に内分する点だから

$$\overrightarrow{OW_1}=\frac{\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{24}\overrightarrow{OB}$$

CB 部分の重心の位置ベクトル $\overrightarrow{OW_2}$ は，

$$\overrightarrow{OW_2}=\frac{\frac{1}{3}+1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$

2 点 OW_1, OW_2 を 1 : 2 に内分する点は

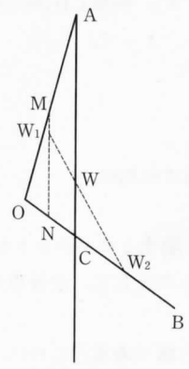


図 1

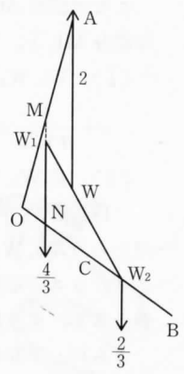


図 2

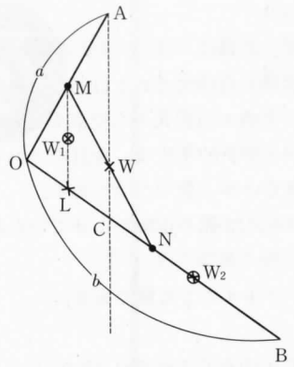


図3

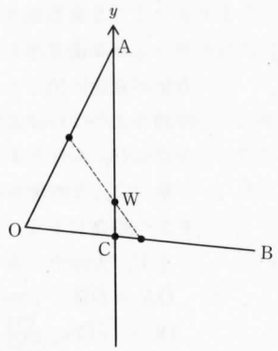


図4

$$\frac{2\overrightarrow{OW_1}+\overrightarrow{OW_2}}{1+2}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OW_1}+\overrightarrow{OW_2})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

これは全体の重心の位置ベクトル $\overrightarrow{OW}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ に等しく，たしかに全体の重心 W は線分 W_1W_2 を重さの反比 1:2 に内分している．

$\overline{OA}\neq\overline{OB}$ のときは，$\overline{OA}=1$, $\overline{OB}=k$ として計算しているが，同様に確かめられるので省略する．この方法には名古屋市の神谷正さん，新潟県の原幸仁さんのがあった．

つぎは，滑川市の高見次郎さんのメネラウスの定理を用いた方法である．

長さについて，$AO=a$, $BO=b$ とする．また，AO の中点を M, BO の中点を N とし，OC の中点を L とする(図3)．

重心の性質から，AC と MN の交点は W で，重さの比から

$$MW:WN=b:a \qquad ①$$

である．また，△MON と直線 AC について，メネラウスの定理から

$$\frac{OC}{CN}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\quad OC:CN=2b:a \qquad ②$$

②から長さを計算して，

$$OC=\frac{b^2}{a+2b},\qquad CB=\frac{b(a+b)}{a+2b} \qquad ③$$

ここで図形 AOC(鉛直線の左側)の重心を W_1，図形 CB(同右側)の重心を W_2 とすると，W_1 は線分 ML 上，W_2 は線分 CB の中点にくる．よって，

〈1〉 W_1, W_2 にかかる重さの比は

$$a+\frac{b^2}{a+2b}:\frac{b(a+b)}{a+2b}=a+b:b \qquad ④$$

〈2〉 点 W_1, W_2 の直線 AC までの腕の長さの比は

$$LC:CW_2=OC:CB=b:a+b$$

だから点 W_1, W_2 にかかる重さの直線 AC に関するモーメントが等しい．だから釣合っている．メネラウスの定理やチェバの定理を用いたものとして，大分市の樋口恒生さん，吹田市の田川善一さん，東京都の ζ さんのがあった．

さらに，宇和島市のカッパーさんによる方法である．これは，座標の取り方が工夫されていて，OC の長さを求めずに一気に証明するところに特徴がある．

AOC と BC によるWまわりのモーメントをそれぞれ W_L, W_R として

$$W_L+W_R=0$$

を示せばよい．AO, BO の長さをそれぞれ a, b とする．

AW を y 軸とする直交座標を取り，点 X の x 座標を X_x で表す．$A_x=W_x=C_x=0$ である．図4のように O は y 軸の左側にあるものとし，$O_x=x_1$, $B_x=x_2$ とすると，W は AO の中点と BO の中点を結ぶ線分を $b:a$ に内分するから

$$W_x=\frac{1}{a+b}\left\{\frac{ax_1}{2}+\frac{b(x_1+x_2)}{2}\right\}=\frac{ax_1+b(x_1+x_2)}{2(a+b)}=0$$

すなわち

$$ax_1+b(x_1+x_2)=0 \qquad (1)$$

一方

$$W_L=\frac{x_1}{2}\left(a+\frac{-bx_1}{x_2-x_1}\right)=\frac{ax_1(x_2-x_1)-bx_1^2}{2(x_2-x_1)}$$

$$W_R=\frac{x_2}{2}\cdot\frac{bx_2}{x_2-x_1}=\frac{bx_2^2}{2(x_2-x_1)}$$

よって，

$$W_L+W_R=\frac{ax_1(x_2-x_1)+b(x_2^2-x_1^2)}{2(x_2-x_1)}=\frac{1}{2}\{ax_1+b(x_1+x_2)\}$$

(1)により

$$W_L+W_R=0$$

となる．

これ以外に，大阪市の石田等さんは，複素ベクトルを用いて，鉛直線の方程式を行列の形で示して，C の座標を計算されていた．正解者はそれぞれ工夫をされていたが，誌面の都合上割愛させていただきます．

なお，ブーメランの重心より，なぜ戻るのかに興味のある方は，拙著『ブーメランはなぜ戻ってくるのか』(ネスコ，1994)をご覧ください．また，室内でも飛ばせる紙ブーメランの作成方法は，朝日新聞の記事(1995. 11. 10，関西は 10. 30)を参考にしてください．

次回はもっとよい出題をしますから，乞うご期待．

西山 豊(にしやま ゆたか／大阪経済大学，情報処理)

(え／鶴岡政明)