亀井図はなぜ約数に有効か

西山　豊

大阪経済大学情報社会学部

Home page: http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/index.html

Email: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

概要

約数同士はバラバラに存在するのではなく、ある構造をもっていて、1 次元、2 次元、3 次元、n 次元の図として表現できる。これが亀井図であり、亀井喜久男は 1975 年にそれを発見している。60 の約数 12 個は 3 次元直方体の頂点および格子点に配置する。

AMS Subject Classification: 11A51, 97F30, 97K30

キーワード：　亀井図、約数、素因数分解、高次元立方体

１．約数集合の構造

約数とは割り切れる数のことをいう。たとえば 60 の約数は

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

の 12 個あるが、数が多いので見落とすことがある。60 を 1 から 60 までの数字で一つずつ割っていき、割り切れた数を約数としてもよいが、60 回の割り算は効率が悪い。そこで一般には素因数分解を用いる。60 を小さい素数から割っていき素数の積にする。

$$60 \div 2 = 30$$

$$30 \div 2 = 15$$

$$15 \div 3 = 5$$

つまり、60 は 2, 2, 3, 5 の素数の積として表される。

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

これらの因数 2, 2, 3, 5 を組み合わせたものがすべて約数となる。たとえばこうだ。因数がなしは、

1

の一通り、因数が一つは、

2, 3, 5

の三通り、因数が二つは、

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$3 \times 5 = 15$$

の四通り、因数が三つは、

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$2 \times 2 \times 5 = 20$$

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

の三通り、因数が四つは、

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$$

の一通りとなる。以上より

$$1 + 3 + 4 + 3 + 1 = 12$$

の 12 通りの組み合わせがあり、12 個の約数となる。しかし、この方法も因数が増えてくると簡単には答えが出せない。

約数にはモレがないかの吟味として、左右両端の数を掛け合わせて 60 になるという方法があるが、これも約数が計算されてからの話で完全ではない。

$$1 \times 60 = 60$$
$$2 \times 30 = 60$$
$$3 \times 20 = 60$$
$$4 \times 15 = 60$$
$$5 \times 12 = 60$$
$$6 \times 10 = 60$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 10 \quad 12 \quad 15 \quad 20 \quad 30 \quad 60$$

約数同士に関連性はないものだろうか。実は約数同士はバラバラに存在するのではなく、ある構造をもっていて、1 次元、2 次元、3 次元、n 次元の図として表現できる。これが亀井図であり。亀井喜久男は 1975 年にそれを発見している[1]。60 の約数 12 個は図 1 のような 3 次元直方体の頂点および格子点に配置する。

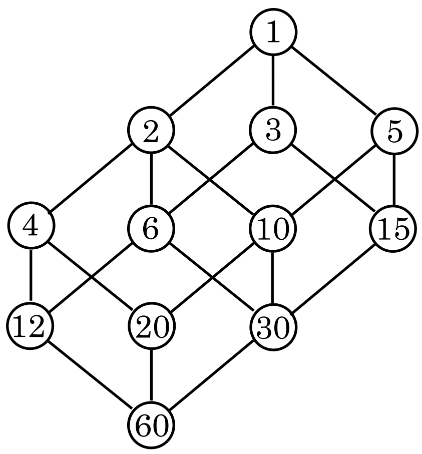


図 1. 60 の約数の亀井図

2．亀井図の描き方

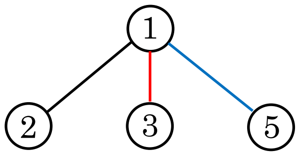
なぜこのような配置になるのか、60 の素因数分解

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

から順を追って説明しよう。60 には四つの因数があるが、2 が重複しているので、互いに素な因数は三個であり、亀井図では 3 次元のグラフになる。

1 を原点として約数をつなげていくと 60 に到達することを示そう。互いに素な因数 2, 3, 5 の進む方向を、互いに直交する 3 次元 xyz 座標に対応させる。1 に 2 を掛けるのは x 軸方向に、3 を掛けるのは y 軸方向に、5 を掛けるのは z 軸方向に進むこととする。それぞれ黒色、赤色、青色の線で色分けし、①から進んで②、③、⑤とする。

$$1 \times 2 = 2$$
$$1 \times 3 = 3$$
$$1 \times 5 = 5$$



②から進む方向として残っている因数は 2, 3, 5 であるので、2 からは 3 方向が考えられ、

$$2 \times 2 = 4$$
$$2 \times 3 = 6$$
$$2 \times 5 = 10$$

より、黒で進んで④とし、赤で進んで⑥とし、青で進んで⑩とする。

③から進む方向として残っている因数は 2, 2, 5 であるので、3 からは 2 と 5 の 2 方向が考えられ、

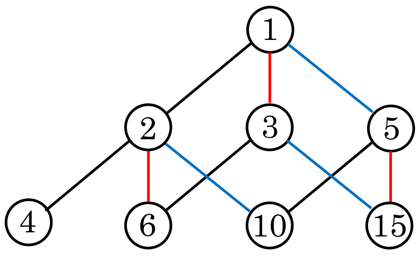
$$3 \times 2 = 6$$
$$3 \times 5 = 15$$

より、黒で進んで⑥とし、青で進んで⑮とする。

⑤から進む方向として残っている因数は 2, 2, 3 であるので、5 からは 2 と 3 の 2 方向が考えられ、

$$5 \times 2 = 10$$
$$5 \times 3 = 15$$

より、黒で進んで⑩とし、赤で進んで⑮とする。



3 段目には④と⑥と⑩と⑮が並んでいる。

④から進む方向は、

$$4 \times 3 = 12$$
$$4 \times 5 = 20$$

の 2 方向があり、赤で進んで⑫とし、青で進んで⑳とする。

⑥から進む方向は、

$$6 \times 2 = 12$$

$$6 \times 5 = 30$$

の 2 方向があり、黒で進んで⑫とし、青で進んで㉚とする。

⑩から進む方向は、

$$10 \times 2 = 20$$

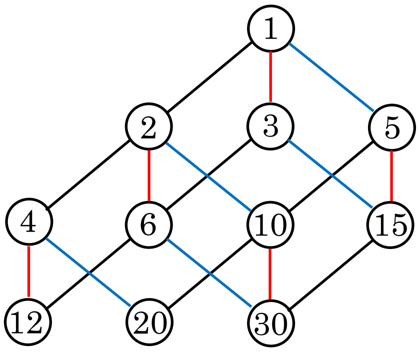
$$10 \times 3 = 30$$

の 2 方向があり、黒で進んで⑳とし、赤で進んで㉚とする。

⑮から進む方向は、

$$15 \times 2 = 30$$

の 1 方向しかなく、黒で進んで㉚とする。

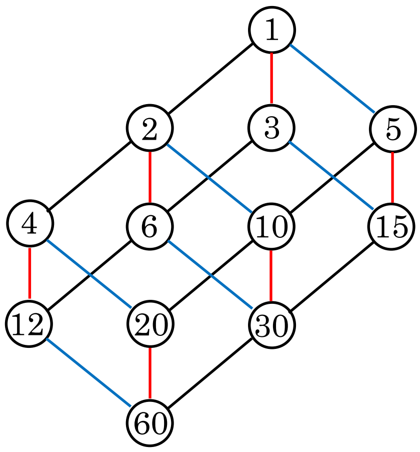


このようにして 4 段目には⑫と⑳と㉚が並ぶ。それぞれ進む方向は 1 方向しかなく、ともに 60 に到達する。

$$12 \times 5 = 60$$

$$20 \times 3 = 60$$

$$30 \times 2 = 60$$



これで図 1 に示した 60 の約数についての亀井図が描けたことになる。

３．高次元の亀井図も可能

亀井図は任意の自然数 N の約数に対して描けることができる。ただし N を素因数分解したとき、互いに素な因数が 3 個の場合は 3 次元の、4 個の場合は 4 次元の、5 個の場合は 5 次元の亀井図となる。30 の約数は 3 次元の、210 の約数は 4 次元の、2310 の約数は 5 次元の亀井図となる。

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

4 次元以上の高次元立方体についても亀井図が描けられ、そのアルゴリズムが示されている[1]。

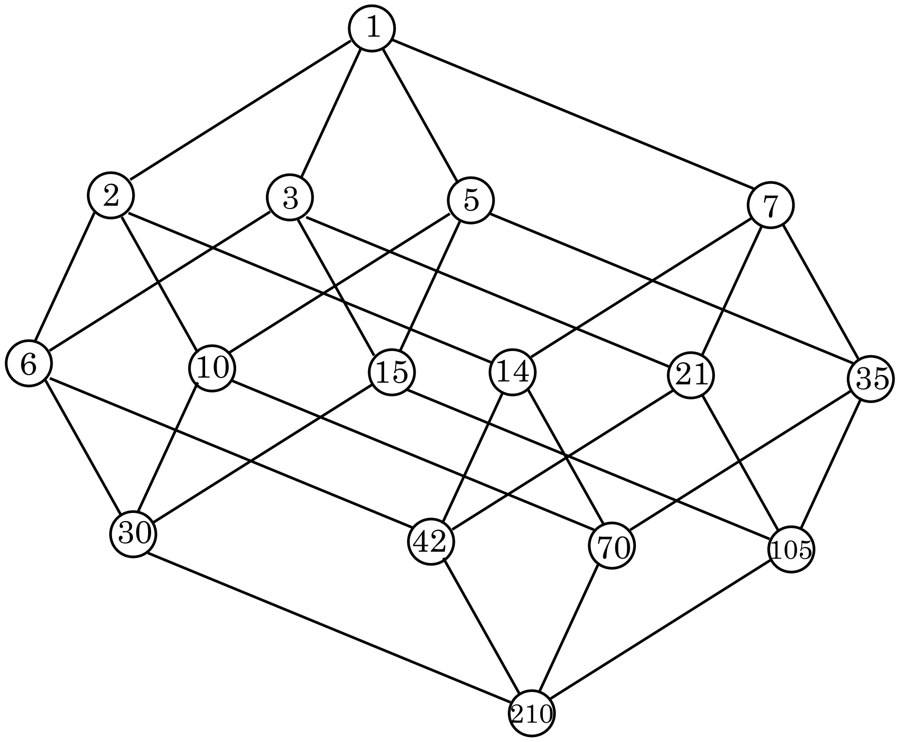


図 2. 210 の約数の亀井図（4 次元）

４．100 までの約数と亀井図

1 から 100 までの約数を求め、それぞれの亀井図を描いてみよう。その数が素数の場合は、約数は 1 と素数の 2 個である。100 までの素数は 25 個あり、1 と素数 25 個の 26 個を除外した 74 個の中から、6，16，24，30，54，60，90，100 の 8 個について考える（表 1）。

前述したように、数 N を素因数分解する。因数を掛け合わせることで約数が求まる。数 N が

$$N = p^i q^j r^k$$

と素因数分解されたとき、約数の個数 M は

$$M = (i+1)(j+1)(k+1)$$

となる。互いに素な因数の数が一つの場合は 1 次元の、二つの場合は 2 次元の、三つの場合は 3 次元の亀井図が描ける（図 3）。

たとえば、$N = 24$ は $2^3 \times 3$ と素因数分解され、約数は 1，2，3，4，6，8，12，24 であり、約数の個数は $M = (3+1) \times (1+1) = 8$ 個である。互いに素な因数が 2 個であるから、亀井図は 2 次元となる。

参考文献

［1］亀井喜久男「研究室の窓：高次元立方体の表現」『数理科学』1992 年 1 月号、pp. 68-73

N	素因数分解	約数	約数の個数	亀井図の次元
6	2×3	1, 2, 3, 6	4	2
16	2^4	1, 2, 4, 8, 16	5	1
24	$2^3 \times 3$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8	2
30	$2 \times 3 \times 5$	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8	3
54	2×3^3	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	8	2
60	$2^2 \times 3 \times 5$	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	12	3
90	$2 \times 3^2 \times 5$	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90	12	3
100	$2^2 \times 5^2$	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100	9	2

表 1.　100 までの約数（抜粋）

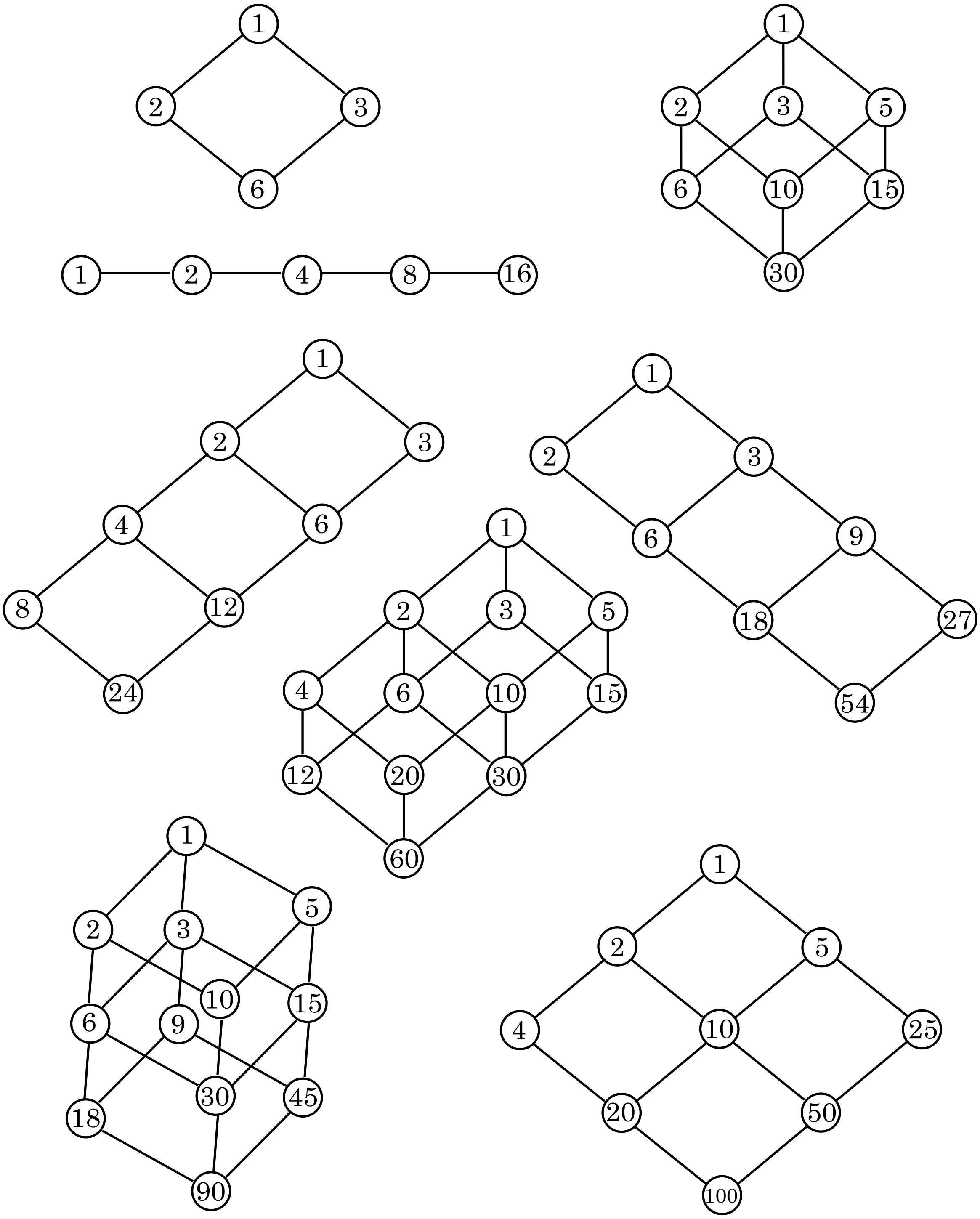


図 3. 亀井図（6, 16, 24, 30, 54, 60, 90, 100 の約数）