ベンハムのコマに関する動的干渉モデル（短縮版）

西山　豊

要約

私は 2023 年に「ベンハムのコマに関する動的干渉モデル」という論考を発表したが，ここでは，最も重要な動的干渉について，図を整理統合して簡潔に説明したい。

AMS Subject Classification：92C20, 00A79, 94A12

Keywords：Benham's top, subjective color, visual system, interference, wavelength, phase shift, equation of motion

１．はじめに

知覚心理学における主観色(Subjective colors)の研究はプレボー(1826)に始まり，フェヒナー(1839)，ベンハム（1894）と続く[1]。チャールズ・ベンハム（1860-1929）は白黒の図柄から色が浮かび上がるベンハムのコマ（Benham's top）を考案し，そのおもちゃがイギリスで大流行となり，雑誌ネィチャーでも取り上げられたが，その理由は今でもわかっていない。

私は，ベンハムのコマは，何らかの形で干渉のようなものが働いているのではと推測し，主観色が現れる仮説をたてた(1979)[2]。その時から 45 年経過するが，最近になってその仮説を完成することができた[3]。つまり，連続する 2 つの光刺激がヒトの視覚系を通すことによって動的な干渉をひき起こすこと，主観色が波長順に現れることを，数学と物理学の知識で説明したい。

２．極座標から直交座標へ

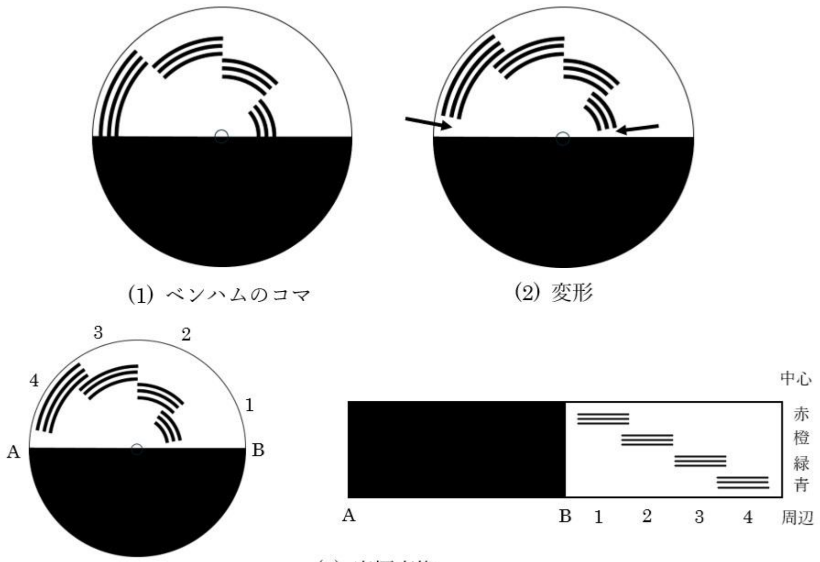

図１　極座標から直交座標へ

ベンハムのコマについて概観してみよう。直径が約 10 センチの円盤で，下の半円は黒色で塗りつぶされていて，上の半円には 3 本ずつの円弧が描かれている（図 1(1)）。円弧は中心角が 45 度で 4 つのブロックがある。円弧の本数は 2 本でも 1 本でもよいが，3 本が見えやすい。コマを時計回り（右方向）にまわすと外から青，緑，橙（だいだい），赤の順に色が見える。この色は鮮明な色ではないが，黒色でも白色でもなく，明らかに色を感じることができる[4]。コマを反時計回り（左方向）にまわすと外から赤，橙，緑，青の順に

色が見える。コマをまわす向きを逆にすると現れる色の順が逆になること，色の並ぶ順序は虹と同じように光の波長の順になっていることが，主観色解明のキーとなる。

私は，今後の理論展開のために，図1(2)のように，外側と内側の円弧の位置を中心角で約10度，矢印のように下半円の黒と引っ付かないようにずらした。こうすることによって，黒っぽい色になっていた主観色が見やすくなった。そして，4つのブロックはどれも黒－白－黒－白のパターンとなった。

極座標を直交座標に変換すると図1(3)のようになる。コマの外周に，反時計まわりにAとB，１から４の記号をつける。円盤は右方向に（時計回りに）まわっているとする。視点を左端の A の場所に固定すると，コマはまずAからBまでの黒の部分が通過する。円盤の下半分の黒は目を休めるためのもので，主観色には関係しない。円盤が半周すると 1 の円弧が表れ，つぎに 2 の円弧が表れ，3 の円弧，4 の円弧とつづく。円盤の中心から赤，橙，緑，青の主観色が見える。直交座標では上から下に向かって赤，橙，緑，青となる。

赤から青はどれも黒－白—黒—白の順になっている。最初の黒と二番目の黒の長さは同じであるが，二番目の黒を挟む前後の白の長さが違う。最初の白を第一次刺激，二番目の白を第二次刺激とするなら，この 2 つが何らかの干渉（強調，打消しなど）を起こすのではないかと考えられる。

３．波の重ね合わせ

ベンハムのコマは 1 秒間に 2～5 回転していて，このパターンが繰り返されるので，不規則な矩形のデジタル波とみなすことができる。第一次刺激の白は，眼球から網膜を経て錐体で吸収され大脳で白と認識される。第二次刺激の白も，眼球から網膜を経て錐体で吸収され大脳で白と認識される。白と白が重なると白になり，色が浮かび上がる余地がないかに見える。

神経系による生体内の情報処理システムの基本要素はニューロン（神経細胞）である。ニューロン間の情報伝達はイオン伝導である。イオン伝導は刺激がある値より大きくなければパルスを発生しないこと（閾性：いきせい）や，伝達が遅れたりすること（遅延）がある。私は，この特性が主観色に関係しているのではないかと思う。

さて，波長と振幅が同じで，位相差がαとする 2 つの正弦波の重ね合わせを考えてみよう（図 2）。

$$y_1 = \sin\theta$$
$$y_2 = \sin(\theta + \alpha)$$

第一次刺激と第二次刺激の正弦波は，周期が 5 である（上段）。位相が 90 度（$\alpha = \frac{\pi}{2}$）ずれて重なったとき，波の最大振幅は 1.4 倍になり，180 度（$\alpha = \pi$）ずれたときは，波は打ち消しあい振幅は 0 になり，360 度（$\alpha = 2\pi$）ずれたときは，振幅は 2 倍になる（下段）。2 つの正弦波の重ね合わせは，三角関数の和積の公式より次式となる。

$$y_1 + y_2 = \sin\theta + \sin(\theta + \alpha) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)$$

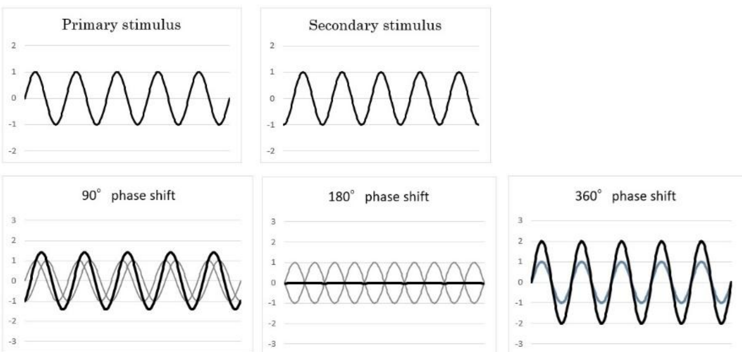

図 2　波の重ね合わせ

4．動的な干渉

第一次刺激と第二次刺激の波に位相差がないときは（$\alpha = 0$），干渉が起こらず，白に白を重ねると白になり，色は浮かんでこない。2 つの波に位相差があるとき（$\alpha \neq 0$），干渉が起こり，特定の色が浮かび上がることを説明しよう。白色はあらゆる色を含んでいるが，簡単にするため赤，緑，青の 3 色とし，RGB とする。

図 3 は，やや複雑であるが，4 行 4 列の合計 16 個のグラフ群で構成される。

赤（R）の周期を 4，緑（G）の周期を 5，青（B）の周期を 6 とする。

一行目は赤（R）であり，赤の波長ずらした波（R1），緑の波長ずらした波（R2），青の波長ずらした波（R3）があり，元の赤（R）と重ね合わせたグラフである。R+R1 は振幅が 2 倍に，R+R2 は振幅が 1.6 倍に，R+R3 は振幅が等倍になる。赤の波長ずらしたとき，赤が大きく浮かび上がる。

二行目は緑（G）であり，赤の波長ずらした波（G1），緑の波長ずらした波（G2），青の波長ずらした波（G3）があり，元の緑（G）と重ねると，G+G1 は振幅が 1.4 倍に，G+G2 は振幅が 2 倍に，G+G3 は振幅が 1.7 倍になる。緑の波長ずらしたとき，緑が大きく浮かび上がる。

三行目は青（B）であり，赤の波長ずらした波（B1），緑の波長ずらした波（B2），青の波長ずらした波（B3）があり，元の青（B）と重ねると，B+B1 は振幅が 0 に，B+B2 は振幅が 1.6 倍に，B+B3 は振幅が 2 倍になる。青の波長ずらしたとき，青が大きく浮かび上がる。

四行目は上３つの色（RGB）を重ねたものである。RGB で記述すると左端は(255, 255, 255)で白色になる。二列目は(255, 179, 0)で黄土色，三列目は(204, 255, 204)で薄緑，四列目は(128, 217, 255)で薄青となる。主観色は赤，緑，青を基調にしながら，他の色も残っているので，パステル調となる。

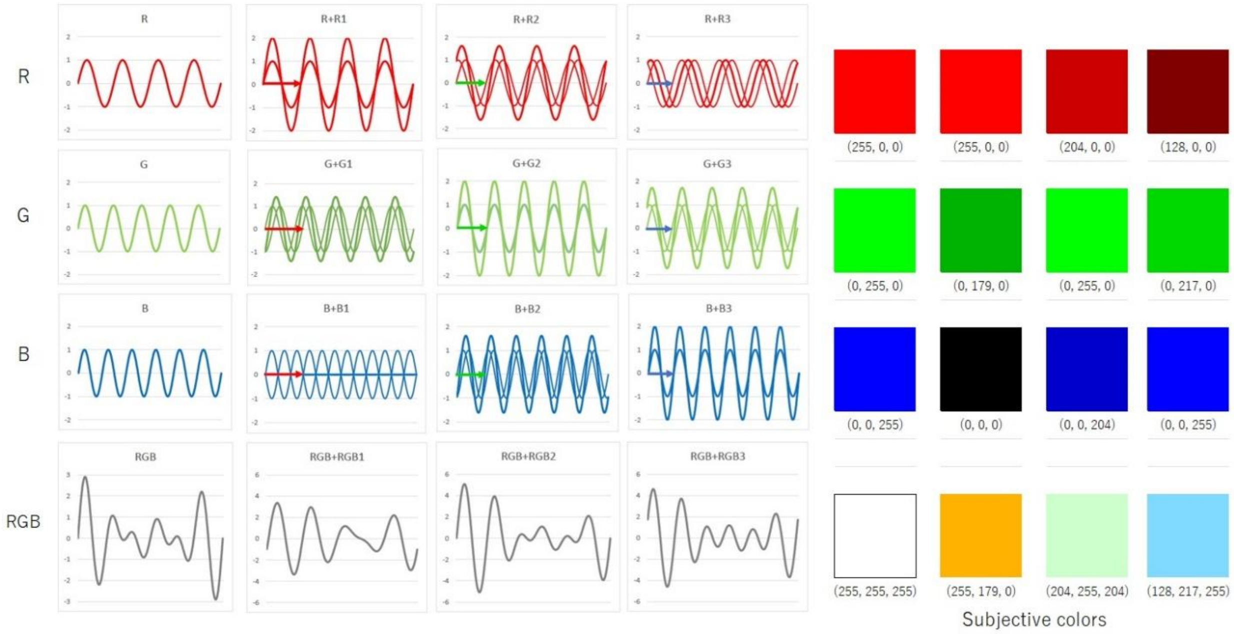

図 3　特定の色が浮かび上がる理由

5．遅延の運動方程式

ベンハムのコマとの対応を考えてみよう。図 1(3)で回転する円盤を直交座標に変換したが，それを簡略化すると図 4 のようになる。コマが回転すると，直交座標では左から右に進み，これが繰り返される。上から赤，橙，緑，青に対応する。波長は長いほうから短いほうに並んでいる。どのケースも黒－白―黒－白の順になっていて，最初の黒は目を休めるところで主観色に関係せず，つづく白－黒－白が主観色に関係する。最初の白を第一次刺激，黒を挟んで二番目の白を第二次刺激と呼ぶことにする。第一次刺激がず

れて，第二次刺激に重なるとき，動的な干渉が起こる（図4(1)）。

第一次刺激がずれる大きさを，赤がいちばん大きく，青がいちばん小さくすると，図3で示した特定の色が浮かび上がる理由と符合する。そんな都合のよい仮説が成り立つのだろうか。

白ー黒ー白の真ん中の黒は第一次刺激の伝達を遅らせる，抑制する働きをするのではないだろうか。第一次刺激の白の区間が短いときは大きく遅れ，長いときは小さく遅れるとするなら，主観色の説明に都合がいい。そこで私は大胆な仮説を立てた。

第一次刺激の白を，光の量，伝達する物質，運動する物体と考え，質量m (m_i)，加速度a (a_i)を対応させる。白の面積を白色光が視覚系に伝える物理量ととらえるなら，その大きさを質量に例えることもできるだろう。白の面積が大きければ光量が大きく質量は大きく，面積が小さければ光量が小さく質量は小さい。黒の部分は白色光を一切含まず，視覚系には何も伝えない。むしろ先行する白が視覚系に伝えた物理量の進行を停止または遅らせる働きをするのではないかと考えられる。

黒は白の伝達を遅らせる働きをする力である。黒の長さはどれも同じなので力F（一定）とすると，これらには

$$F = ma = m_i a_i$$

の運動方程式が成り立つと考えられる。

図4(2)より，第一次刺激の長さは，赤が最も短く，青が最も長いので，質量mは，

$$m_1 < m_2 < m_3 < m_4$$

の関係がある。運動方程式 $F = ma$ より，加速度aは,F（一定）なので,

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

となる。ニュートンの運動方程式がベンハムのコマにおいても成り立つ。第一次刺激の区間が小さいほど大きくずらされ，区間が大きいほど小さくずらされて第二次刺激と重なり，動的な干渉が起こっている。

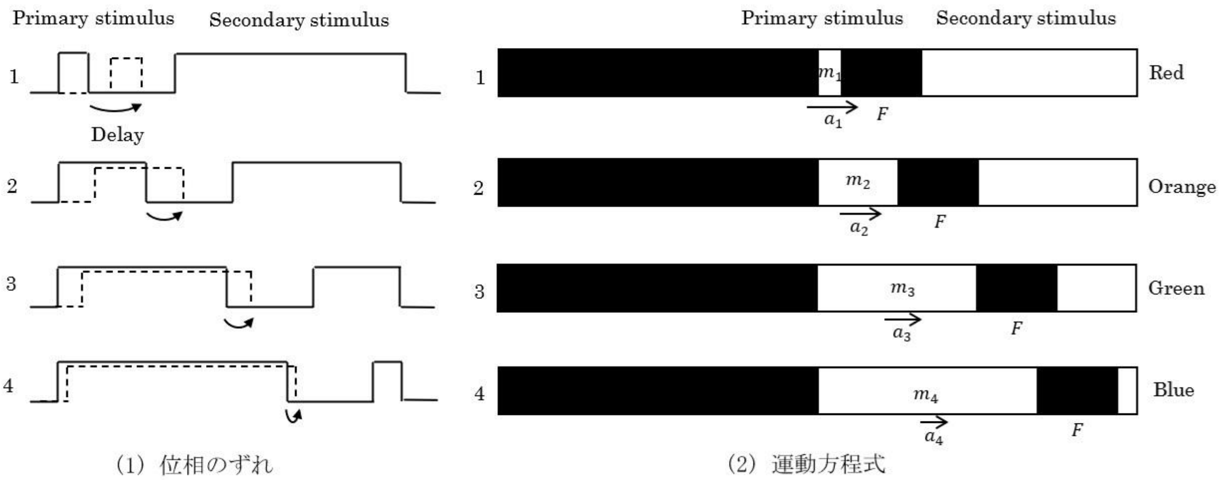

図4　位相のずれと遅延の運動方程式（$F = ma$）

参考文献

[1] Jozef Cohen, Donald A. Gordon, The Prevost-Fechner-Benham subjective colors, *Psychological Bulletin*, 46(2), 97-136, 1949.

[2] Yutaka Nishiyama, Benham's Top, *Mugendai*, No. 46, 45-50, 1979.

[3] Yutaka Nishiyama, A Dynamic Interference Model for Benham's Top, *Journal of Osaka University of Economics*. 74(1): 99-110, 2023.

[4] Yutaka Nishiyama, Benham's top, YouTube 動画　https://www.youtube.com/watch?v=uivj9Oibq4E